



TITLE:

周波数精密測定に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

安田, 嘉之

CITATION:

安田, 嘉之. 周波数精密測定に関する研究. 京都大学, 1987, 工学博士

ISSUE DATE:

1987-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r6204>

RIGHT:

周波数精密測定に関する研究

昭和61年12月

安田嘉之

周波数精密測定に関する研究

昭和 61 年 12 月

安 田 嘉 之

DOC
1986
24
電気系

正 誤 表

訂正箇所	誤	正
P. 1 14 行目	$\nu=2ev/h$	$\nu=2eV/h$
P. 12 4 行目	影響を与えてない。	影響を与えていない。
P. 13 図 2.4	CRYTSTAL UNIT	CRYSTAL UNIT
P. 15 1 行目	…と思われる。ハム変調と…	…と思われる。雑音にはハム変調と…
P. 19 図 2.11 中	$K_0=0.15$	$K_d=0.15$
P. 22 図 2.14	時間 (計)	時間 (時)
P. 23 (2.19) 式	$E(y_{ik}-a_k-b_kx_i)(y_{jk}-a_k-b_kx_j)=0$	$E(y_{ik}-a_k-b_kx_i)(y_{jk}-a_k-b_kx_j)=0$
P. 42 (2.128) 式	$=(\alpha'/\nu_0)f+(\beta'/\nu_0)^2f^2$	$=(\alpha'/\nu_0^2)f+(\beta'/\nu_0^2)f^2$
P. 43 (2.131) 式	$h_{-1}=\alpha_{\nu_0}+\alpha(1/\nu_0^2)$	$h_{-1}=\alpha_{\nu_0}+\alpha(1/2Q)^2$
P. 44 1 行目	…を図 2.22(A) に示す。	…を図 2.22(A) および (B) に示す。
P. 44 8 行目	$\sigma_y(\tau)$ には τ^{-1} …	$\sigma_y(\tau)$ では τ^{-1} …
P. 46 図 3.1	$\rightarrow Z_0$	$\rightarrow Z_e$
P. 47 (3.9) 式	$\dots \frac{1}{Q_e} \frac{d\theta_e}{d\theta}$	$\dots \frac{1}{Q_e} \frac{dQ_e}{d\theta}$
P. 47 (3.10) 式	$\alpha_{Q_e}=\alpha_{\omega_0}+\alpha_L$	$\alpha_{Q_e}=-(\alpha_{\omega_0}+\alpha_L)$
P. 48 (3.14) 式	$\dots \left\{ \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\alpha_L}{2\alpha_{\omega_0}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right\}$	$\dots \left\{ \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\alpha_L}{2\alpha_{\omega_0}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right\}$
P. 51 図 3.7	$\frac{\Delta\phi}{\Delta\theta} = \frac{4(1+s^2+v_e^2)}{(1+s^2)^2+(1-s^2)v_e^2+v_e^4}$	$\frac{4(1+s^2+v_e^2)}{(1+s^2)^2+(1-s^2)v_e^2+v_e^4}$
P. 55 図 3.11	R_H, R_e $\Delta V_{BE}, \Delta V_{BC}, V_{be}$	R_B, R_e $\Delta V_{BC}, \Delta V_{BE}, v_{be}$
P. 117 7 行目	おける。30 GHz/20 GHz…	おける 30 GHz/20 GHz…
P. 126 24 行目	Y. Suburi	Y. Saburi
P. 133 (A2.7) 式	$E(\sum_i v_{i2}^2 \cdot \sum_j v_{j3}^2)$ " 第 6 項 $-2E(\sum_i v_{i1}v_{i2} \sum_j v_{j3}^2)$ " 第 8 項 $-2E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j1}v_{j3})$	$E(\sum_i v_{i2}^2 \cdot \sum_j v_{j3}^2)$ $-2E(\sum_i v_{i1}v_{i2} \sum_j v_{j3}^2)$ $-2E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j1}v_{j3})$
P. 141 表 A3.1	第 1 行第 2 列 $\sigma_s^2(r)$ 第 2 行第 1 列および第 3 行第 1 列 $2\pi f_h \gg 1$ 第 3 行第 2, 第 3 および第 4 列 $\ln(2\pi f_h \tau)$ 第 4 行第 2, 第 3 および第 4 列 $h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$	第 1 行第 2 列 $\sigma_s^2(\tau)$ 第 2 行第 1 列および第 3 行第 1 列 $2\pi f_h \tau \gg 1$ 第 3 行第 2, 第 3 および第 4 列 $\ln(2\pi f_h \tau)$ 第 4 行第 2, 第 3 および第 4 列 $h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$
P. 142 (A3.16) 式	$\alpha(f)=$	$\mathcal{A}(f)=$

目 次

第1章 序 説	1
第2章 周波数および周波数安定度の測定	7
2.1 はじめに	7
2.2 ビート法による測定	9
2.2.1 測定方法	9
2.2.2 測定とその結果	12
2.2.3 結 論	16
2.3 ゼロビート法による測定	16
2.3.1 測定方法	16
2.3.2 測定とその結果	18
2.3.3 結 論	21
2.4 測定値からの推定法	21
2.4.1 周波数安定度の推定方法	21
(1) 測定方法	22
(2) 周波数変動の推定方法	22
(3) 推定結果	25
2.4.2 周波数（平均レート）の推定法	27
(1) 正規線形回帰モデル	27
(2) 時計面の推定	29
(3) 平均レートの推定	33
(4) 数値例	36
(5) 回帰式の信頼限界について	37
2.4.3 結 論	39
2.5 周波数標準器の安定度	40
第3章 測定用機器	45
3.1 はじめに	45
3.2 高周波同調増幅器	45
3.2.1 真空管増幅器	46
(1) 陽極電源電圧変化による位相変化	46

(2) 周囲温度変化による位相変化	47
(i) 単一同調回路	47
(ii) 複同調回路	49
(3) 白色雑音による位相変動	52
3.2.2 トランジスタ増幅器のフリッカ位相雑音	54
(1) フリッカ位相雑音の解析	55
(2) 実験とその結果	58
3.2.3 結 論	60
3.3 周波数通倍器	61
3.3.1 位相変動の解析	61
(1) プッシュ・プッシュ形通倍器	61
(2) ダブラの基本波入力電圧変化による位相変化	67
(3) ダブラの陽極供給電圧変化による位相変化	70
(4) ダブラの周囲温度変化による位相変化	72
3.3.2 実験とその結果	76
(1) 試作通倍器	76
(2) 位相変動の測定方法	77
(3) 信号入力電圧変化による位相変化の測定	79
(4) 陽極および線条供給電圧変化による位相変化の測定	79
(5) 周囲温度変化による位相変化の測定	80
(6) 通倍器相互の位相変動測定	83
3.3.3 結 論	84
3.4 周波数混合器	85
3.4.1 位相雑音の測定	85
3.4.2 混合器および増幅器の位相雑音と雑音指数	86
3.4.3 結 論	88
3.5 周波数オフセット器	89
3.5.1 周波数オフセットとその方法	89
3.5.2 試作装置	93
3.5.3 実験とその結果	95
3.5.4 実用化装置	98
3.5.5 結 論	99

第4章 時間および周波数の遠隔比較	101
4.1 はじめに	101
4.2 VLF 電波による比較	103
4.3 人工衛星による比較	108
4.3.1 航行技術衛星 (NTS-1)	109
4.3.2 実験用通信衛星	112
4.4 結 論	118
第5章 総 括	121
謝 辞	123
参考文献	125
付 録	129

第1章 序 説^{(1),(2)}

高確度で、また、高安定度の周波数標準の必要性は、近年、物理計測、航法、測地、通信、産業などの分野で非常に増大している。

現在、時間と周波数の標準の確度（正確さ）は、世界的にも、また、国内においても、およそ 1×10^{-13} に達しているが、このような標準の高確度化とこれに関連した測定技術の進歩は他の計量標準の高確度化を促進し、さらに、これらの一元化をも可能にしている⁽¹⁾。

長さの標準（メートル）は、可視光領域のクリプトン 86 の放射の波長に基づいて定義されていた。この標準の再現性は約 $\pm 1 \times 10^{-8}$ であるが、メタンの吸収線で安定化されたヘリウム・ネオンレーザのような高安定度のレーザとマイクロ波帯から赤外領域への周波数通倍技術の開発により、上述のクリプトン 86 よりも約 1,000 倍高精密度の長さの標準がこの種のレーザを用いて得られることが実験的に明らかになった。このようにして、長さの標準はクリプトン 86 からレーザに移し換えられた。すなわち周波数 ν は高精度* で測定できるので、光速を $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ と定義すれば、長さの標準は関係式 $\lambda = c/\nu$ により、実質的には、周波数標準に帰着される。

また、電圧は交流ジョセフソン効果の関係式 $\nu = 2eV/h$ により、普遍定数 $2e/h$ を用いて周波数に結びつけられる。 e と h はそれぞれ、電子の電荷とプランクの定数である。この電圧対周波数の関係の普遍性は多数の研究者により検証され、 10^{-8} の桁までは確かとされた。現在、この電圧標準がそれ以前の標準電池に代って実用されている。

精密時間と周波数の航法、測地への応用も目覚ましい。オメガおよびロラン C 航法では、それぞれの測位精度に必要な送信局間時刻同期精度——オメガは約 $1 \mu\text{s}$ 、ロラン C は約 $0.1 \mu\text{s}$ ——を維持するために、何れも製品のセシウム原子時計が用いられている。米国国防総省が現在実用化中の GPS（世界測位システム、3次元測位精度最高数 m）の時刻同期精度はさらに高く（ns 程度）、衛星には、水晶発振器、ルビジウムおよびセシウム原子時計が搭載されている。

深宇宙追跡と超長基線電波干渉計（VLBI）はこの分野では最も高度な時刻同期技術の応用であろう。前者では、追跡局間の同期精度約 10 ns が要求され、そのため水素メーザが使われる。VLBI については、郵政省電波研究所と米国航空宇宙局（NASA）による共同実験が進行中で、既に基線長の測定精度数 cm を得ている。ここでも周波数安定度 10^{-15} オーダの水素メーザが使われ、また ps オーダの精度でシステム各部の遅延時間の測定が行われている。

* “精度”を確度と精密度を含めた総合的な意味で使う。専門用語については付録 1 参照。

通信への応用も重要である。カラーテレビジョンの多元同期中継では、カラーサブキャリア（約 3.58 MHz）間の位相差を必要な時間中、数度以内に維持しなければならない。これを独立同期方式で行う場合、同期信号系の発振源には 10^{-12} オーダの周波数安定度（10～数 10 分間）が要求される。そのため、我が国では、2, 3 の放送局がルビジウム原子時計を使用している。また、高速度のデジタル通信網のビット同期も独立同期方式により維持する場合、やはり原子時計が必要であり、この目的のためのセシウム原子時計も国内で既に開発されている。

時計、計測器、通信機器などの製造工業でも、それぞれの目的に応じた確度または安定度の標準が活用されている。

以上のような各分野からの時間および周波数標準への要求は、この標準の高性能化を促進し、これがまた、新しいあるいはより高度な周波数標準の応用分野を開拓することにもなる。なお、これら標準の一般利用者への供給は、通常、LF 帯および MF, HF 帯の標準電波により行われるが、前記のような、周波数標準の応用システムは、図 1・1⁽²⁾ に示すように、それ自身が標準の供給源になって利用者にフィード・バックされている。ロラン C とテレビジョン（TV）放送網（同期信号系に原子時計使用の場合）は既に実績十分であり、VLBI やデジタル通信網も高精度の時刻比較または周波数標準供給システムとして高いポテンシャルを持っている。

時間および周波数標準の必要性と重要性は上述のとおりであるが、標準の利用においても、また、これの研究、開発においても精密測定技術が不可欠である。原子時計の研究、開発では、ほとんど“精密測定”そのものと言っても過言ではない。

本研究は、“周波数および周波数安定度の測定”（第 2 章），“測定用機器”（第 3 章）および“時間および周波数の遠隔比較”（第 4 章）から成っている。

本研究の端緒となったのは、それぞれ第 2 章と第 3 章に関連する、標準電波 JJY（MF, HF

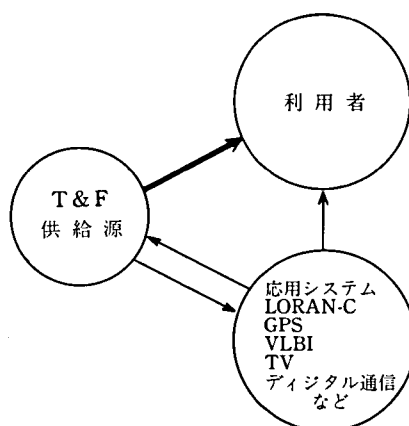


図 1.1 時間・周波数標準の供給源としての高精度応用システム

帯)の発射周波数の精度維持のための水晶発振器の周波数とその安定度の推定法の研究とアンモニア吸収形およびメーザ形原子時計の研究である。

1961年にアンモニアメーザにより、JJYの発射周波数値が決定されるまで、この決定は平均太陽秒を基準として行われた。5~6台から成る水晶時計群(100 kHz GT カット水晶振動子を使用)を東京天文台の子午儀による星の観測値で較正し、これを時刻と周波数の一次標準とした。しかし子午儀観測の精度は約10 msであり、時計群の精密較正*を行うために、約100日間の時刻較正值に最小自乗法により曲線(一般には2次曲線)を当てはめ、群の最確時刻と周波数を求めた。この場合、各時計の重み付けのためにそれぞれの周波数の分散を推定する必要がある。時計相互の周波数比較データから個々の時計の分散の推定精度の計算法が第2・4節に述べられている⁽³⁾。また、時計の周波数(レート)を推定するために、時刻測定値に最小自乗法を適用し、この変化率から求めたレートの推定精度も第2・4節で論じてある⁽⁴⁾。

1951年ころから始められたアンモニア吸収形原子時計の研究では、100 kHz~数 MHz からアンモニアの吸収線(約24 GHz)までの周波数通倍器の出力レベルやその安定度、吸収線検出のための周波数変調における歪の軽減などが回路的な問題としては非常に重要であった。通倍器は受信管、小形送信管、進行波管、クリスタルダイオードなどを用いて目的を達成し、変調歪の問題は吸収線幅(100~200 kHz 程度)に対応した周波数シフトキーイング(FSK)方式で対処し、吸収方式の限界とされる 10^{-9} ~ 10^{-8} の精度が得られた^{(5),(6)}。

次に開発された3-2線アンモニアメーザ(発振周波数約23 GHz)では、メーザ発振出力信号に同期した約1.9 GHzの信号と水晶発振器から通倍した出力信号との周波数比較が行われた^{(7),(8),(9)}。比較精度の向上には、高次の周波数通倍器の位相変動の低減化が必要であり、これに重点を置いた通倍器の設計、解析、試作を行った^{(10),(11)}。試作通倍器の位相変動の測定では、とくに周囲温度変化、供給直流電源変化の影響が明らかになり、温度変化については、理論値と実験値が良く一致した。これらの詳細は第3.3節に記述してあるが、その後研究開発された水素メーザ、セシウムビーム原子時計の周波数通倍器設計の基礎になったと共に、国際的にも先駆的な資料となった^{(14),(15)}。前述のように、アンモニアメーザは周波数の国家標準に使われると共に、その優れたスペクトルの純粋性を利用し、水晶発振器の短期周波数安定度の評価にも使用された^{(7),(12)}。しかし、この場合、水晶発振器からの高次の周波数通倍の影響を分離する必要があった。そのために、位相安定度評価用の別の通倍器列の途中で周波数を僅かにずらし(周波数オフセット)、両通倍器列の出力段で生ずるビート周波数を周期測定する方法を考案した⁽¹³⁾。また、2台の水晶発振器相互の安定度測定にもこの方法を使用した。これらについては、

* 1950年代の標準電波の周波数確度(24時間平均周波数)の国際無線通信諮問委員会(CCIR)勧告値は $\pm 2 \times 10^{-8}$ であった。

第2.2節に詳述してある。なお、上述の方法と類似の方法を米国ヒューレットパッカード社（HP社）でも、独立に提案し実用している⁽¹⁶⁾。

1960年代始めころから1971年まで世界のほとんどの標準電波は“周波数オフセット”を実施していた。このころの標準電波は原子時計の周波数の正確さと安定度に基づいて発射されていたが、原子周波数の積算である原子時と地球自転に基づいた平均太陽時との間に差を生じるため、これら2つの時系間の整合を保つ目的で、標準電波の“周波数オフセット”が行われていた。そのために“周波数オフセット器”が必要となり、これの研究が行われた⁽¹⁷⁾。本研究では、電子回路だけによる独自の方式の高安定度のオフセット器を第3.5節に論じており、後続の研究にも影響を与えた⁽¹⁸⁾。なお、この方式と同じ考え方のオフセット器がチェコスロバキアでも独立に研究されている⁽¹⁵⁾。

原子時計をはじめ、高性能の周波数標準の各分野への利用が進むにつれて、周波数安定度の定義とその測定法の研究が1963年ころから米国の提案によりCCIRを中心に組織的に行われた。我が国からも、アンモニアメーザを基準とした水晶発振器の短期安定度の測定結果についての寄与文書を初期に提出し採択された⁽¹⁹⁾。上記の国際的研究の結果、周波数安定度の定義（尺度）として、それまでの時間的領域の尺度（たとえば周波数の分散）に加えて、周波数領域の尺度として、周波数変動あるいは位相変動のパワ・スペクトル密度がより本質的なものとして採択された。我が国でも電気学会を中心にこの研究が進められ、“周波数安定度とその測定”の技術報告書がまとめられた⁽²⁰⁾。第2・3節には、これに関連した成果として、“ゼロビート法による測定”が記述されている。測定法の有用性はこれに使用する測定機器の性能（とくに低雑音性）に依存することが多い。このような測定機器の低雑音化の研究の成果は第3・2および3・4節で述べられている。

一般の計量標準と同様に、周波数・時間標準の国際比較は重要である。初期の国際比較は1950年代終りころから、VLF帯電波を仲介として行われ、これにより、セシウム原子の遷移周波数9,192,631,770 Hzが決められ、これが秒の定義の基礎となった。1960年代においては主に米国海軍天文台（USNO）の管理する原子標準で周波数安定化されたVLF海岸局の受信位相の測定を継続し、また、1970年代にはロランC電波（100 kHz）の測定により、国際比較を行い、世界的に統一された原子時の“国際原子時”の決定に寄与した。比較精度は、1日平均の周波数で表した場合、VLFではおよそ 10^{-11} 、ロランCでは 10^{-12} のオーダーである⁽²¹⁾。原子時計の周波数精度が 10^{-12} から 10^{-13} のオーダーまで向上されてくるにしたがって、さらに高精度の比較方法として衛星が利用されるようになった。著者らは、米国の航行技術衛星（NTS-1）による国際比

• CCIR Doc. VII/J-3 Nov. 1964.

較実験を行い、その有効性を実証した⁽²²⁾。衛星を使用した時刻比較システムは、単に国際比較だけではなく、標準供給のための“標準電波”としても有用で、実験用放送衛星“ゆり”(BS)による周波数、位相の測定も行い、従来形の標準電波よりも高精度の供給ができることを確かめた⁽²³⁾。衛星によるこの種のシステムでは、電波伝搬遅延時間のほかに、送受信装置における信号遅延時間（絶対値）とその変動の評価が重要である。実験用通信衛星の実験では、この問題を取り扱っている⁽²⁴⁾。以上のような国際比較を含めた、周波数と時間の遠隔比較については第4章で述べられている。

6 項欠

第2章 周波数および周波数安定度の測定

2.1 はじめに

周波数の測定に必要な周波数標準は、セシウム原子の特定の遷移周波数を 9, 192, 631, 770 Hz と規定することにより定義される。このことから、時間の単位の秒は、この遷移に対応する電磁波の 9, 192, 631, 770 周期の継続時間で定義される（秒の定義）。このように、周波数標準と時間標準の實質は同一である。周波数標準を実現するのがセシウム原子時計（セシウムビーム原子周波数標準器）である。国の標準に使われているセシウム原子時計は一次標準と呼ばれ、その周波数の規定周波数値（上記）からのかたよりを定期的の実験（誤差評価実験）の結果に理論式を用いて推定し、標準の正確さ（確度）の維持に努めている。一次標準の確度は我が国においても、欧米先進諸国（アメリカ、カナダ、西ドイツ）のそれとほぼ同じで 1×10^{-13} のレベルに到達している。

しかし、一次標準は連続運転が困難なため、これを原器として使い、実際には一次標準で校正された二次標準を使用する。我が国の標準電波は現在、JJY (2.5, 5, 8, 10, 15 MHz) と JG2AS (40 kHz) であるが、これらの送信源には、一次標準で定期的に校正された二次標準器群（連続運転可能なセシウム原子時計群）の中の 1 台が使われる。一般利用者は、その保有する二次標準器をそれぞれの必要精度に応じ、JJY（受信の際の精度はふつう 1×10^{-7} ）または JG2AS（24 時間の受信位相値の変化から求める場合 10^{-11} のオーダー）で校正してこれを実用の標準としている。また、特別の利用者は、第 1 章で述べたように、ロラン C、TV サブキャリア、GPS などを使用し、より高精度の校正あるいは相互比較を行っている。

周波数標準器をたとえ一次または二次標準などで校正しても、校正時点での周波数値を維持し続けることは一般に不可能であり、周囲の温度、湿度、供給電源など環境の変化、標準器の構成要素または部品の経年変化やこれらの不規則な変動などにより、周波数変動がおきる。このように、周波数標準あるいは校正の対象となる信号発生器（信号源）をある環境のもとで連続運転させたとき、どの程度一定の周波数値を維持できるかの度合いが周波数安定度で、標準器や一般の信号源の校正に際しては、常に周波数安定度に留意する必要がある。また、周波数標準の応用分野には、たとえば、ドップラレーダやドップラ航法のように、周波数確度よりもむしろ周波数安定度、とくに短期間周波数安定度が重要なものが多い。この傾向は宇宙開発の促進と共に強まり、1960 年代には、アメリカを中心に周波数安定度の（尺度の）合理的で簡便な定義とそれに関連する測定法の国際間の研究が行われた⁽¹⁶⁾。1970 年には、米国 IEEE は周波

数安定度の(尺度の)第1の定義として、信号源の公称周波数 ν_0 で規準化された周波数変動、すなわち、 $y = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0}$ のスペクトル密度 $S_y(f)$ —— f はフーリエ周波数(変動成分または変調周波数)——を与え、第2の定義として、2標本標準偏差(two-sample standard deviation) $\sigma_y(\tau)$ —— τ は測定時間(平均化時間)——を与えた。前者は周波数領域の定義であり、後者は時間領域の定義であるが、実用とは別に、少くとも理論的には第1の定義の方が根元的なものとされた⁽²⁵⁾。

周波数の測定法と周波数安定度の測定法は完全には同じではないが、前者は一部の例外を除けばほとんど後者に含まれる。また、後者の方が周波数標準や測定系の各種の雑音が関係し易く条件は厳しい。そこで本章では周波数安定度の測定法と測定結果を論ずることにする。

測定法は種々に分類されうるが、求めようとする周波数安定度の尺度が周波数領域のものであるか、あるいは時間領域のものであるかにより測定法を分類するのが自然である。周波数領域の測定では、周波数のウィンドーとして周波数分析器が、時間領域の測定では、時間のウィンドーとして周波数カウンタがふつう用いられるが、これらの装置にもそれぞれ測定範囲に限界があり、安定度の尺度を求める場合、相互に他の領域での測定結果を使うことも当然必要となる。図2.1はごくふつうの周波数分析器とエレクトロニックカウンタなどを使って周波数安定度が十分な精度で直接測定できる範囲(陰影の部分)を示している。いずれの領域の測定を行うかは周波数標準の利用目的にもよるが、両領域における測定法のそれぞれの利点、特長を活かすことが望ましい⁽²⁰⁾。

本章では、上記2種類の測定法のうち、とくに時間領域測定を取り扱い、第2.2節および第2.3節でそれぞれ“ビート法”および“ゼロビート法”を論ずる。前者は、第1章で述べたように、原子時計の研究開発の過程で生れたもので独自性は強い。後者はアメリカにおける周波数安定度の定義と測定法研究の影響を受けて行われたものである。

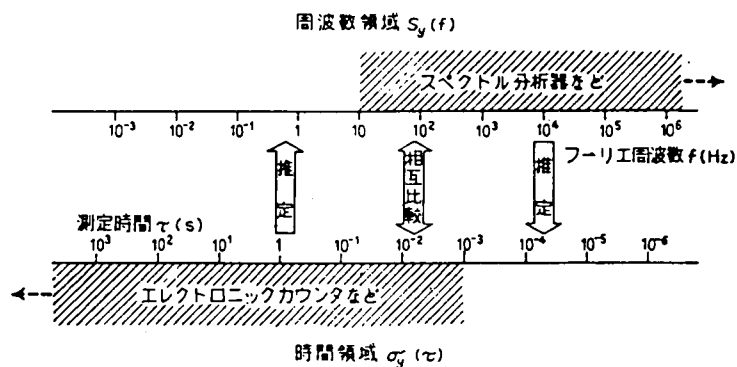


図2.1 周波数領域及び時間領域における周波数安定度測定の相補関係

2.2 ビート法による測定^{(12),(13)}

2.2.1 測定方法

図 2.2 は周波数標準器の周波数とその安定度のビート法による測定方法を示している。この方法により次の測定ができる。

- (1) アンモニア・メーザを基準とした周波数とその安定度ならびに周波数スペクトル⁽¹²⁾
- (2) 測定系自身の安定度（測定系雑音）⁽¹³⁾
- (3) 標準器相互の周波数差とその安定度。

まず(1)の場合、図の“接続1”を使う。被測定発振器から周波数通倍して得た1.9 GHzの信号を、アンモニア・メーザの発振周波数22.834185 GHzに位相同期した1.9028446 GHzの信号と混合し、2.8446 MHzの信号を得る。この信号を2 MHzの標準周波数でビート・ダウンした後、標準周波数との混合および周波数通倍により、図のように3種類の測定精度に対応した出力信号55.4 kHz (1.9 GHz)、66.2 kHz (5.7 GHz) および67.6 kHz (11.4 kHz)を得る。()内の数値は通倍次数から求めた等価的な測定周波数、したがって測定精度に関係する。さらに、これらの信号を周波数合成器(標準周波数で駆動)の出力信号と混合し、約1 kHzのビート信号 f_B を作る。この信号の1, 10, 100, 1000 および10,000 サイクルに相当する時間間隔 τ を標準

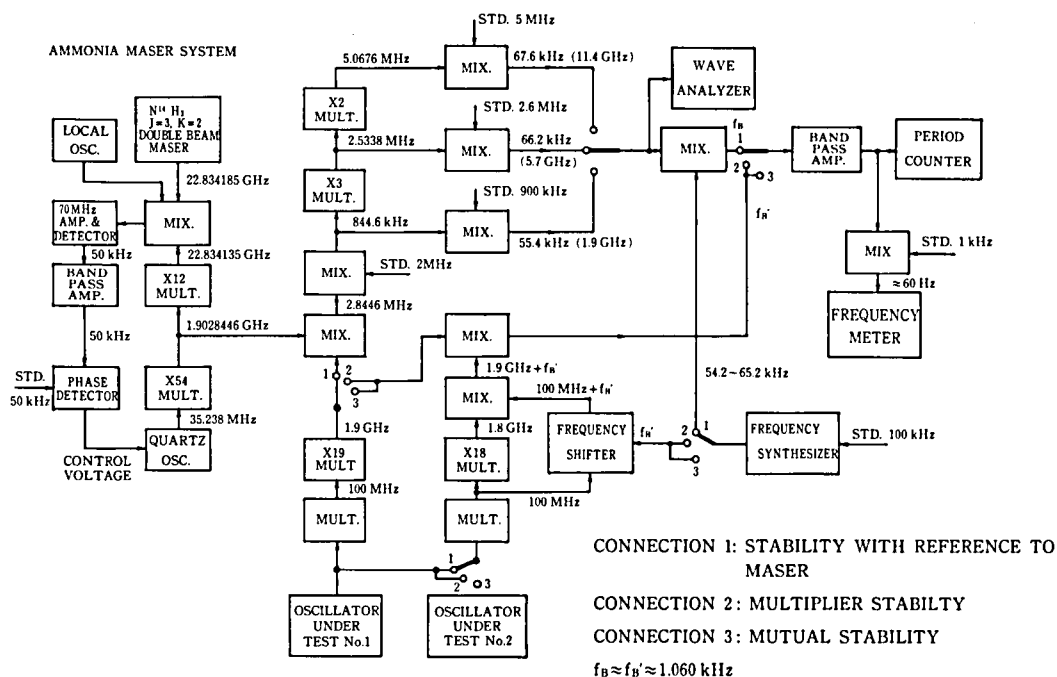


図 2.2 ビート法による周波数および周波数安定度測定系

表 2.1 1 kHz 信号を用いて行った周期測定精度とその周波数安定度測定結果への影響

平均化時間 (秒)		0.001	0.01	0.1	1	10
$\frac{\sigma\tau}{\tau}$	測定値	1.38×10^{-4}	1.25×10^{-5}	2.25×10^{-6}	1.60×10^{-7}	1.62×10^{-8}
	±1 カウント 誤差	5.77×10^{-5}	5.77×10^{-6}	5.77×10^{-7}	5.77×10^{-8}	5.77×10^{-9}
$\frac{\sigma f}{f}$	1.9 GHz	7.26×10^{-11} (3.04×10^{-11})	6.57×10^{-12} (3.04×10^{-12})	1.18×10^{-12} (3.04×10^{-13})	8.42×10^{-14} (3.04×10^{-14})	8.52×10^{-15} (3.04×10^{-15})
	5.7 GHz	2.42×10^{-11} (1.01×10^{-11})	2.19×10^{-12} (1.01×10^{-12})	3.94×10^{-13} (1.01×10^{-13})	2.81×10^{-14} (1.01×10^{-14})	2.84×10^{-15} (1.01×10^{-15})

周波数の 10 MHz を時計信号として時間間隔カウンタで測定し、 τ の標準偏差 $\sigma\tau$ から次式により、平均化時間 τ がそれぞれ 0.001, 0.01, 0.1, 1 および 10 秒の場合の被測定発振器の周波数安定度 $\sigma f/f$ を求めることができる。

$$\frac{\sigma f}{f} = \frac{f_B}{nf} \frac{\sigma\tau}{\tau} = \frac{N}{nf} \frac{\sigma\tau}{\tau^2} \quad (2.1)$$

ここで f は被測定発振器の周波数、 f_B はビート信号の周波数 (≈ 1 kHz)、 n は通倍次数、 τ は平均化時間(測定時間) = N/f_B 、 N は測定したビート信号の周期数である。それぞれの平均化時間につき約 0.6 秒の休止時間をおいて 130 個の読み取りを行った。したがって、全測定時間は τ の長さに応じて、80～1,400 秒である。このような τ の測定値に最小 2 乗法で直線を当てはめ、 τ の標準偏差 $\sigma\tau$ を計算した。なお、周波数値はこの回帰直線で与えられる。

周波数安定度の測定精度はまず周期測定の精度に依存する。また、これは周期測定用カウンタの分解能(±1 カウント誤差およびカウンタ内部雑音による)と入力信号に含まれる雑音の影響を受ける。周波数合成器(図 2.2)の 1 kHz 信号をカウンタに加えて行った周期測定精度についての実験結果を表 2.1 に示す。時計信号は前述のように 0.1 μ s である。表には、それぞれの τ についての $\sigma\tau/\tau$ の測定値と共に、カウンタの ±1 カウント誤差による $\sigma\tau/\tau$ の計算値が示されている。この値は、各カウント値の誤差がその値を中心に -1～+1 の範囲で一様に分布していると仮定して計算したものである。測定値は ±1 カウント誤差の約 2～4 倍になっているが、これは、上述のように、入力信号に含まれている雑音とカウンタ内部雑音がカウンタ入力における信号対雑音比(SNR)を低下させ、周期測定の際のゼロ交差点を変動させるためである。 $\sigma\tau/\tau$ と信号対雑音比の関係は次式で与えられる。

$$\frac{\sigma\tau}{\tau} = \frac{1}{2\pi(\text{SNR})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{N} \quad (2.2)$$

ここで N は周期数である。いま SNR=60 dB、 $N=1$ とすれば、上式から $\sigma\tau/\tau=1.59 \times 10^{-4}$ と

なり、表1で $\tau=0.001$ 秒の場合の $\sigma\tau/\tau$ の値 1.38×10^{-4} に近い値になる。また、表の $\sigma f/f$ は、等価的な測定周波数が1.9 GHzと5.7 GHzのとき、 $\sigma\tau/\tau$ の測定値を(2.1)式に代入して求めたものである。なお、()内の数値は ± 1 カウント誤差に対応するものである。

各標準器の周波数スペクトルは、図2.2の55.4 kHz (1.9 GHzに等価)、66.2 kHz (5.7 GHz)および67.6 kHz (11.4 GHz)の信号を図示の波形分析器に加えて測定する。分析器の等価雑音帯域幅は約5 Hzであり、掃引速度は約1.5 Hz/sを主として用いた。分析器入力における雑音対信号の比は次式で与えられる。

$$\frac{P_N}{P_s} = \sum \frac{P_{N, \text{periodic}}}{P_s} + \int \frac{P_N(f)}{P_s} df \quad (2.3)$$

ここで、 $P_{N, \text{periodic}}$ は、たとえばハム変調——商用電力周波数(50 Hz)による位相変調——により生ずる周期成分の電力を、また、 $P_N(f)$ は周波数 f における不規則雑音スペクトル密度を表している。なお、(2.3)式における和と積分は搬送波を中心に ± 300 Hzの範囲で行っている。

次に(2)の場合、すなわち、被測定発振器の周波数から1.9 GHzまでの周波数通倍器で生ずる位相変動に起因する等価的な周波数安定度⁽¹³⁾の測定は図2.2の“接続2”により、もう1系統の周波数通倍器をも用いて行う。(1)のときと同様、ビート信号の周期測定ができるように、この通倍器の出力周波数は1.9 GHzから f'_B (≈ 1.060 kHz)だけシフトさせてある。図2.3はこの周波数シフタのブロック図である。このような方法で通倍器の周波数安定度を測定する際の精度は当然周波数シフタの安定度が関係する。図2.3のうち破線で結んだ部分を用いて測定した周波数シフタの安定度、すなわち100 MHz入力に相対的な $100 \text{ MHz} + f'_B$ 出力の安定度を表2.2に示す。表中 $\sigma f'_B$ はシフタにおける周波数変動であり、また $\sigma f/f$ は1.9 GHzの通倍出力に

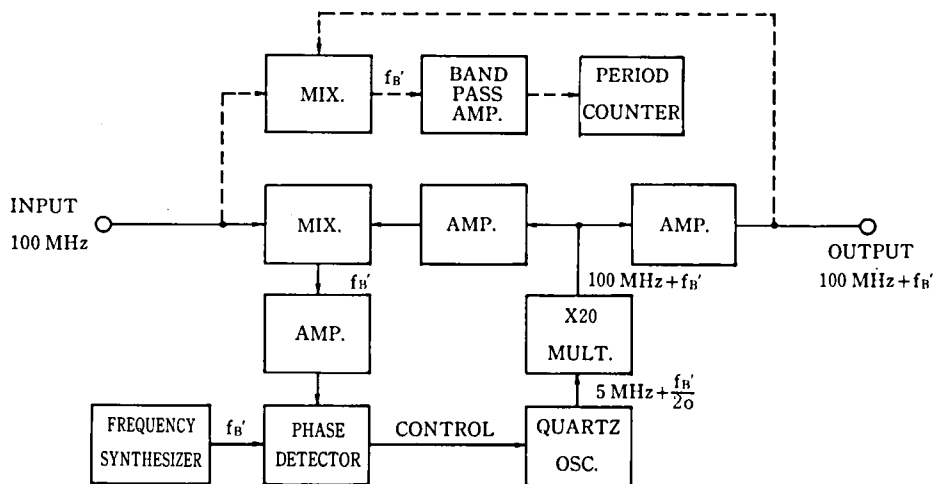


図2.3 周波数シフタ

表 2.2 周波数シフタの周波数変動 (σf_B) とその周波数通倍器 (1.9 GHz まで) の安定度測定結果への影響

$$\left(\frac{\sigma f}{f} = \frac{\sigma f_B}{nf}, nf=1.9 \text{ GHz} \right)$$

平均化時間 (s)		0.001	0.01	0.1	1	10
100 MHz までの 励振源	σf_B (Hz)	2.28	0.390	0.0302	0.00352	0.000315
	$\frac{\sigma f}{f}$	1.20×10^{-9}	2.05×10^{-10}	1.59×10^{-11}	1.85×10^{-12}	1.66×10^{-13}
100 kHz 水晶発振器 (No. 2) 水晶フィルタつき	σf_B (Hz)	1.24	0.130	0.0251	0.00270	0.000129
	$\frac{\sigma f}{f}$	6.55×10^{-10}	6.86×10^{-11}	1.32×10^{-11}	1.42×10^{-12}	6.81×10^{-14}
5 MHz 水晶発振器 (No. 3)	σf_B (Hz)					
	$\frac{\sigma f}{f}$					

換算したシフタの安定度である。100 MHz 入力信号を得るための通倍器の励振源として 100 kHz 水晶発振器を用いたときの安定度は 5 MHz 水晶発振器を用いたときよりも悪いが、これは通倍数の差とみていい。後述のように、何れの場合も、このシフタは発振器の周波数安定度測定の精度にはほとんど悪い影響を与えてない。後に図 2.5 に示すように、通倍器安定度の周波数計による連続記録もできる。記録の速さはフルスケール (1×10^{-9}) に対し約 5 秒である。

最後に (3) の場合、すなわち発振器相互の安定度測定には、図 2.2 の“接続 3”を使う。この場合、一方の通倍器に周波数シフタが付いているので、何れの被測定発振器の周波数もずらす必要がない。

2.2.2 測定とその結果^{(12),(13)}

アンモニア・メーザを基準として測定した、3 台の 5 MHz 標準器 (No. 1: セシウムビーム制御, No. 2: 真空管式, No. 3: トランジスタ式) の周波数安定度を図 2.4 に示す。図には、メーザ自身の安定度——厳密には、メーザ発振に相対的な位相制御ループ (図 2.2) の安定度——を始め、周波数通倍器 (被測定発振器周波数から 1.9 GHz 帯までの) と周波数シフタの安定度、さらに、周期測定精度の影響なども示してある。メーザへの位相同期ループの安定度は、図 2.2 の位相検波器への 50 kHz 入力の周波数安定度測定値から求めた。また、周波数通倍器の影響 $(\sigma f/f)_{mul}$ は、2 系統の通倍器の等価的周波数変動が独立かつ同程度と仮定し、実測値の $1/\sqrt{2}$ を採った。 $(\sigma f/f)_{mul}$ は、平均化時間 $\tau=0.001 \sim 0.1$ 秒の範囲では、各標準器の安定度 $\sigma f/f$ とほぼ同程度の値であり、標準器 No. 1 では、0.001~0.01 秒の範囲でむしろ逆転している。このことは、通倍器自身の雑音の影響よりも、標準器の等価的周波数変調 (FM) 雑音側波帯に対する通倍器の帯域通過特性の非対称による影響が大きいことを示している。記録周波数計 (図

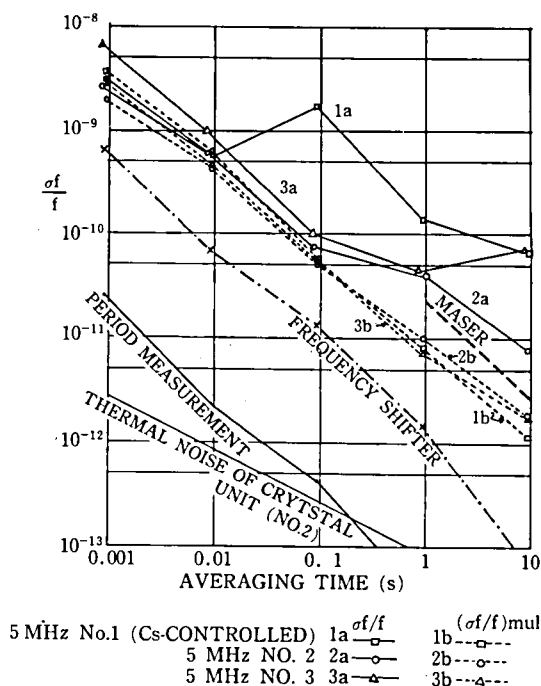


図 2.4 5 MHz 発振器の周波数安定度

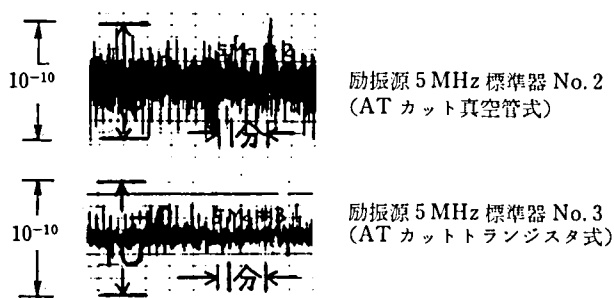


図 2.5 記録周波数計による通倍器の安定度

2.2)による通倍器の影響を標準器 No.2 および No.3 について図 2.5 に示す。この周波数計の応答速度(前述)からみて、これらの記録値は図 2.4 における τ が 1 秒付近の $(\sigma f/f)mul$ に対応していると言える。 $\tau \geq 1$ では、 $(\sigma f/f)mul$ は $\sigma f/f$ に対して無視できる。これは、この場合、関係する標準器の FM 雑音スペクトルは搬送波周波数から ± 10 Hz くらいであり、この帯域では両通倍器の帯域通過特性の対称性もよいので、標準器雑音の相殺が十分に行われるためであり、また、とくに水晶発振器 (No.2 および No.3) の場合、 $\tau \geq 0.1 \sim 1$ 秒で水晶振動子の周波数温度特性の影響が顕著になり始めるからである。周波数シフタの安定度の影響は、図 2.4 の場合はほとんど無視できる。周期測定精度の影響も同様である。

$\tau=0.1$ 秒付近をピークに、No.1 標準器の安定度が悪いのは、セシウムの遷移周波数 (≈ 9.2 GHz) に水晶発振器の周波数を制御するための位相同期ループ (PLL) の特性に因るものである。

図 2.4 には、また、No.2 標準器 (5 MHz AT カット水晶発振器) の振動子の等価抵抗による熱雑音の発振周波数安定度への影響が示されている。 $f_0=5$ MHz, 振動子の $Q=2 \times 10^6$, 電力 $P=0.1 \mu\text{W}$, 温度 $T=400$ K として

$$\left[\left(\frac{\sigma f}{f} \right)_{thm} \right]_{\tau} = \sqrt{\frac{kT}{2PQ^2\tau}} \quad (2.4)$$

から計算した⁽²⁶⁾。発振周波数の安定度 $\sigma f/f$ への影響は小さい ($\tau=1$ 秒で 8.3×10^{-14})。

水晶発振器出力あるいは通倍器入力段付近におけるハム変調 (商用周波数およびその高調波による位相変調) も $\sigma f/f$ に影響しうる。変調指数が 1 に比べて十分小さいとき、この影響は

$$\left[\left(\frac{\sigma f}{f} \right)_{hum} \right]_{\tau} = \sqrt{\frac{2E_N^2}{E_S^2}} \frac{1}{nf} \frac{\sin \pi f_m \tau}{\pi \tau} \quad (2.5)$$

で表される⁽¹²⁾。ここで、 $2E_N^2/E_S^2$ はハム変調側波帯と搬送波の電力比である。

No.2 標準器において、 ± 300 Hz のハム変調側波帯が $\tau=1$ ms における周波数安定度に及ぼす影響は、(2.5) 式で $\tau=1$ ms, $f_m=300$ Hz, $nf=11.4$ GHz (5 MHz から 2280 通倍) および $2E_N^2/E_S^2=0.02$ (後述、図 2.9 における 11.4 GHz 信号のスペクトル測定値による) とすれば

$$[(\sigma f/f)_{hum \ 300\text{Hz}}]_{1\text{ms}} = 3.2 \times 10^{-9} \quad (2.6)$$

となる。この同じハム側波帯の影響は $\tau=1$ 秒では、(2.5) 式から 3.2×10^{-12} と計算される。

図 2.6 に 2.5 MHz 水晶発振器——100 kHz と 1 MHz の分周出力がある——の周波数安定度を示す。分周出力の安定度は 2.5 MHz の原発振出力に比較して明らかに悪い (理由については 3.3 で述べる)。しかし、 $\tau=10$ 秒では 3 者はほとんど同じ値を示している。

図 2.7 は 2 台の 5 MHz 水晶発振器 (No.2 と No.3) 相互の周波数安定度と測定に用いた通倍器の影響を示している。 $\sigma f/f$ の測定値は $\tau=0.001 \sim 0.1$ 秒では図 2.4 の値 (発振器は同じであるが、測定の時期が違う) とほぼ同じであるが、 $\tau \geq 1$ では、図 2.7 の相互安定度よりも No.3 標準器だけの安定度の方が悪い。これは、2.5 で再論されるように、 $\tau \geq 1$ では、長い平均化時間での測定で顕著になってくるフリッカ雑音 ($1/f$ 雑音) の影響がでていえる。この場合、測定の個数、したがって全測定時間により $\sigma f/f$ の値が変わることがしばしば見られた。

図 2.8 は 100 kHz 水晶発振器 (100 kHz GT カット, ミーチャム・ブリッジ型) の 5.7 GHz で測定した周波数スペクトルで、高次の通倍により、振幅変調 (AM) 雑音は抑圧され、ほとん

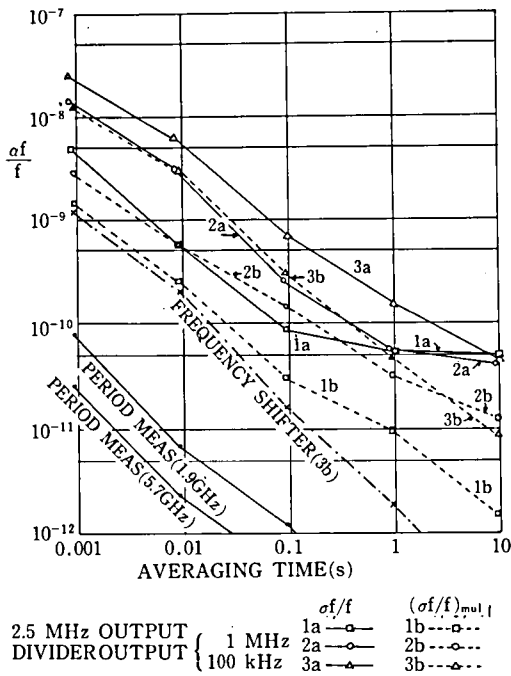


図 2.6 2.5 MHz 水晶発振器の周波数安定度

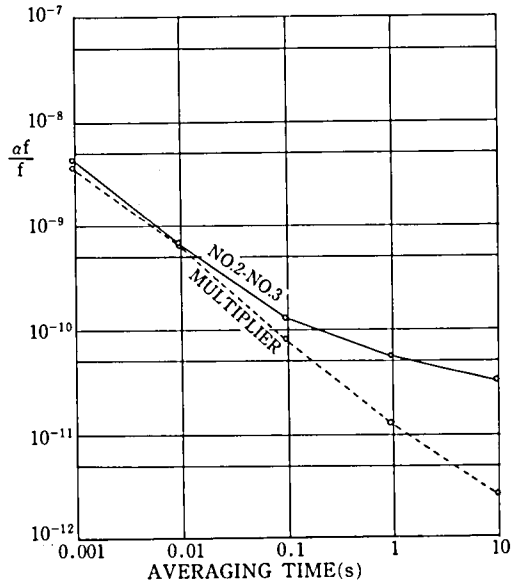


図 2.7 5 MHz 水晶発振器の相互の周波数安定度

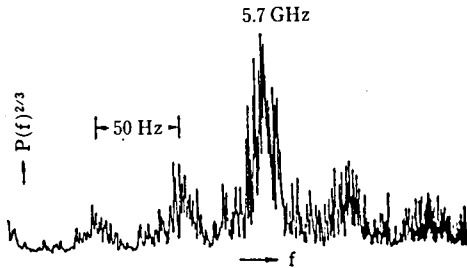


図 2.8 100 KHz 水晶発振器の周波数スペクトル (5.7 GHz で測定)

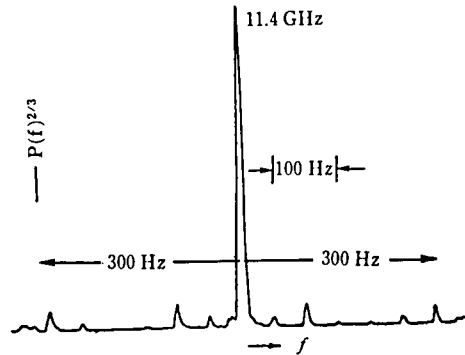


図 2.9 5 MHz 水晶発振器の周波数スペクトル (11.4 GHz で測定)

ど PM (または FM) 雑音と思われる。ハム変調と不規則な雑音がある。

図 2.9 は 5 MHz 水晶発振器 (No. 2) の同様の測定結果である。ハム変調の方が不規則な雑音よりも大きい。ハム変調の原因として、安定化直流電源からの電磁的な誘導が考えられる。100 kHz および 5 MHz 発振器の SN 比は、搬送波の ± 300 Hz の範囲を考えた場合、原発振周波数帯に換算し、それぞれ、91 dB および 80 dB である。100 kHz 発振器の場合、ケーブル区間で拾う雑音を軽減するため 2 個の水晶フィルタ (100 kHz) を使用している。

2.2.3 結 論

- (1) アンモニア・メーザを基準として、高確度、高安定度の標準器の周波数および周波数安定度の測定ができる。また、測定に使用する周波数通倍器の安定度測定への影響を不完全ではあるが測定できる。
- (2) 平均化時間が0.001～0.1秒の範囲ではハム変調が周波数安定度に影響しうる。
- (3) 通倍器の影響は0.001～0.1秒の平均化時間では、発振器の周波数安定度と同程度に測定されたが、同一の発振器の雑音スペクトルが2つの異なる帯域通過特性の通倍器により変形されることも要因と考えられる。
- (4) 上記(2)、(3)の影響は平均化時間約10秒では無視できる程度となる。したがって標準器、とくに水晶発振器の短時間の周波数安定度を測定するには、約10秒が最適である。

2.3 ゼロビート法による測定^{(20),(27),(28)}

2.3.1 測定方法

2.2のビート法で高精度の測定を行うには、図2.2と(2.1)式から、 f_B/nf および $\sigma\tau/\tau$ を小さくする必要があった。したがって、この方法は、被測定発振器の基準値からの周波数オフセットが小さく、また、平均化時間 τ が長い場合に非常に有効である。しかし、周波数の短期安定度を測定する場合のように、平均化時間が短い場合がしばしばある。この場合、高精度のためには、(1) 被測定発振器の周波数オフセットを大きくする、(2) 周波数通倍数 n を大きくするなどが必要である。しかし、原子周波数標準器は言うまでもなく、高安定度の水晶発振器の場合、(1)の条件は満足し難い（高安定度水晶発振器の周波数可変範囲は、基準値のおよそ $\pm 1 \times 10^{-6}$ である）。また、(2)は可能であるが、通倍器の位相変動の測定誤差への影響もあり得るので、これも最小限度にとどめたい。

ゼロビート法は、被測定発振器の周波数オフセットをしないで、また、場合によっては周波数通倍も行わずに高精度の測定ができる。

図2.10はこの方法の原理を示す。2台の発振器のうち、1台は基準となる電圧制御水晶発振器(VCXO)、他の1台は被測定発振器である。これらの発振器と位相検波器および増幅器が位相同期ループ(PLL)を形成する。いま

θ_i : 被測定発振器の位相変動

θ_r : 基準発振器(VCXO)自身の位相変動

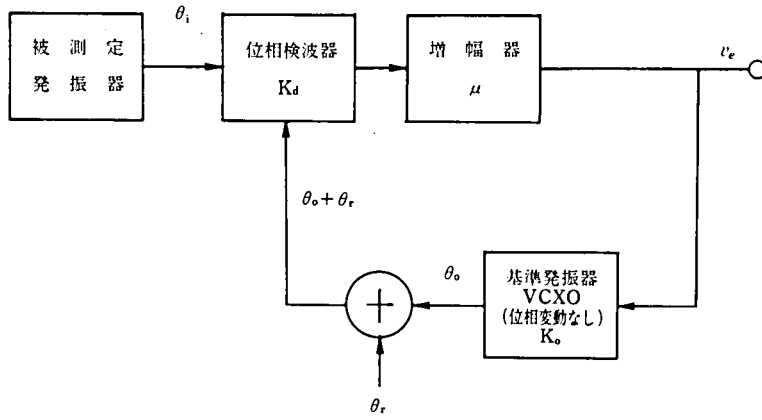


図 2.10 ゼロビート法の原理

θ_o : VCXO 出力の位相

K_o : VCXO の感度 [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$]

K_d : 位相検波器の感度 [$\text{V} \cdot \text{rad}^{-1}$]

v_e : 増幅器出力電圧

μ : 増幅器の利得 (電圧利得)

とすれば、位相検波器の入出力について

$$v_e(t) = \mu K_d [\theta_i(t) - \theta_o(t) - \theta_r(t)] \quad (2.7)$$

また、VCXO については

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} = K_o v_e(t) \quad (2.8)$$

が成り立つ。(2.7) および (2.8) 式をラプラス変換すれば

$$v_e(s) = \mu K_d [\theta_i(s) - \theta_o(s) - \theta_r(s)] \quad (2.9)$$

$$s\theta_o(s) = K_o v_e(s) \quad (2.10)$$

(2.9) および (2.10) 式から

$$v_e(s) = \frac{\mu K_d s [\theta_i(s) - \theta_r(s)]}{s + \mu K_o K_d} \quad (2.11)$$

上式で、 $|s| \ll \mu K_o K_d$ のとき

$$v_e(s) \approx \frac{1}{K_o} s [\theta_i(s) - \theta_r(s)] \quad (2.12)$$

が成り立つ。(2.12)の逆変換を行えば

$$\left. \begin{aligned} v_e(t) &= \frac{1}{K_o} \frac{d}{dt} [\theta_i(t) - \theta_r(t)] \\ &= \frac{1}{K_o} [\omega_i(t) - \omega_r(t)] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

となり、 $v_e(t)$ が周波数変動を表す。したがって、 $v_e(t)$ の平均化時間 τ における安定度 $\sigma_{v_e}(\tau)$ を測定から求めれば、被測定および基準発振器の同じ平均化時間での周波数安定度 $\sigma_i(\tau)$ および $\sigma_r(\tau)$ との関係は(2.13)式から次式のようになる。

$$\sigma_i^2(\tau) + \sigma_r^2(\tau) = K_o^2 \sigma_{v_e}^2(\tau) \quad (2.14)$$

ここで、被測定および基準発振器の周波数変動は独立と仮定した。(2.14)式だけでは $\sigma_i(\tau)$ と $\sigma_r(\tau)$ の分離はできないが、次の仮定ができる場合、 $\sigma_i(\tau)$ の近似値が得られる。

(1) $\sigma_i(\tau) \approx \sigma_r(\tau)$ の場合

$$\sigma_i(\tau) \approx (K_o / \sqrt{2}) \sigma_{v_e}(\tau) \quad (2.15)$$

(2) $\sigma_i(\tau) \gg \sigma_r(\tau)$ の場合

$$\sigma_i(\tau) \approx K_o \sigma_{v_e}(\tau) \quad (2.16)$$

これら以外の場合、2.3.2および2.4.1で述べるように、もう1台の発振器を追加して3台の発振器とし、2台1組にして(2.14)式に相当する3元連立方程式を作り、これを解いて求めることができる。

2.3.2 測定とその結果

ゼロビート法による5 MHz 水晶発振器の周波数安定度測定装置の構成を図2.11に示す。この図において

$$\begin{aligned} K_o &= 0.25 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}] \\ K_d &= 0.15 [\text{V} \cdot \text{rad}^{-1}], \mu = 10^4 \end{aligned}$$

である。したがって

$$\mu K_o K_d \approx 375 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \approx 60 [\text{Hz}]$$

となる。図における電圧周波数変換器は、 $v_e(t)$ を周波数に変換し、コンピューティング・カウ

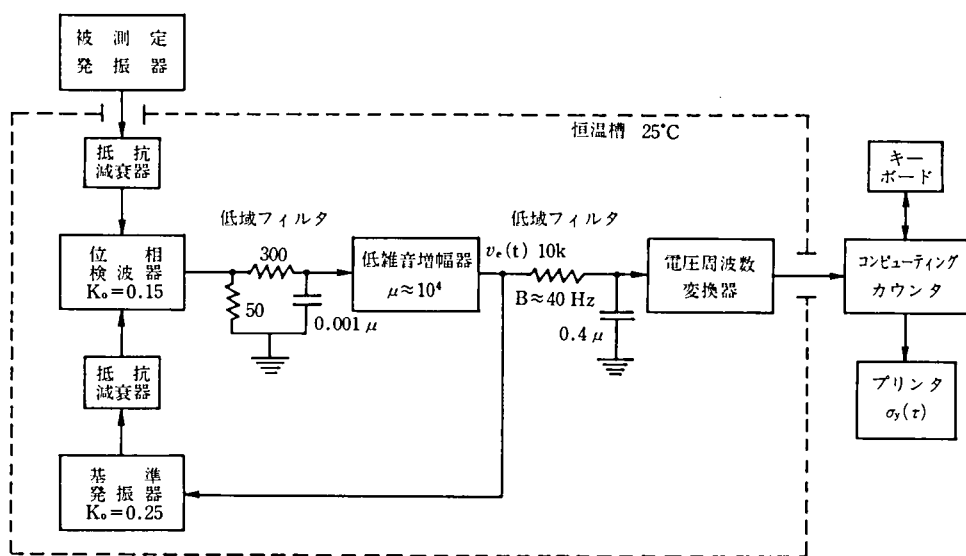


図 2.11 ゼロビート法による周波数安定度 $\sigma_y(\tau)$ の測定

ンタで測定するためのものである。この測定装置での問題点は

- (1) $|s| \ll \mu K_o K_d$ が成立する範囲
- (2) 電圧周波数変換器の変換精度
- (3) 測定装置自身の雑音（システムノイズ）

である。

(1) の条件が満足されるためには、測定できる変動周波数（フーリエ周波数） f は $\ll 60$ Hz の範囲に限られる。 $\mu K_o K_d$ は原理的には増幅器の電圧利得 μ を増せば大きくでき、 f の大きなところ、すなわち、平均化時間 τ の短いところまで測定できるが、現実には、 $\mu = 10^4$ 以上では PLL が発振し、上記 60 Hz の限界を拡大することは難かしい。図 2.11 で低雑音増幅器の次に設けた低域フィルタ（帯域幅約 40 Hz）は (1) の条件を満足するような周波数変動成分だけを通すためのものである。

(2) については、 $v_e(t)$ の代りに電圧周波数変換器に内蔵の校正用電圧を用いて、実験と同一のコンピューティング・カウンタのプログラムで周波数変動に換算して測定した結果、 $\sigma_y(40 \text{ ms}) \approx 4 \times 10^{-14}$ 、 $\sigma_y(\tau < 90 \text{ s}) \approx 1 \times 10^{-14}$ となり、被測定発振器および基準発振器の周波数安定度と比較して、ほぼ無視できる。

(3) のシステムノイズは後述のように、十分低い。

この測定装置を用いた周波数安定度の測定には、まず同一規格の 3 台の水晶発振器 (HP 105) を用いた。発振器の各組合せにつき (2.14) 式に相当する式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2 &= \left(\frac{K_o}{2\pi\nu_0} \right)^2 \sigma_{v_{12}}^2 \\ \sigma_{y2}^2 + \sigma_{y3}^2 &= \left(\frac{K_o}{2\pi\nu_0} \right)^2 \sigma_{v_{23}}^2 \\ \sigma_{y3}^2 + \sigma_{y1}^2 &= \left(\frac{K_o}{2\pi\nu_0} \right)^2 \sigma_{v_{31}}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

ここで、 σ_{yi} ($i=1, 2, 3$)は各発振器の周波数安定度（2 標本標準偏差）で、平均化時間 τ を省略した。 $\nu_0=5$ MHz, また、 σ_{vij} ($i, j=1, 2, 3$)は発振器の各組合せについての $v_e(t)$ ((2.13) 式および図 2.10) の 2 標本標準偏差 100 個平均値をさらに 5 個平均したものである。(2.17) 式を解いて求めた各発振器の周波数安定度 σ_{yi} を τ の関数として図 2.12 に示す(OSC. 1~3)。さらに、このうちの 1 台を基準発振器 (VCXO) として別規格の水晶発振器 (国産) の安定度を求め、OSC. 4 として図示してある。前の 3 台の値はよくそろい、優れた安定度を示している。国産発振器はこれらより少し安定度が悪いが、 $\sigma_y(1s) \approx 2 \times 10^{-12}$ と相当良い。図示の「システムノイズ計算値」は、直接測定したのではなく、周波数領域における周波数安定度の尺度の 1 つである $\mathcal{L}(f)$ (付録 3 参照) 測定^{(20),(29),(30)} の際のシステムノイズの実測値から、時間領域の安定度尺度である $\sigma_y(\tau)$ 測定におけるシステムノイズに計算で変換したものである。このゼロビート法における雑音源は、位相検波器と低雑音増幅器であり、これらからの雑音を一括して等価的に θ_n として被測定発振器の位相雑音 θ_i に重畳して考えると (2.12) 式は

$$v_e(s) = \frac{1}{K_o} s [\theta_i(s) - \theta_r(s) + \theta_n(s)] \quad (2.18)$$

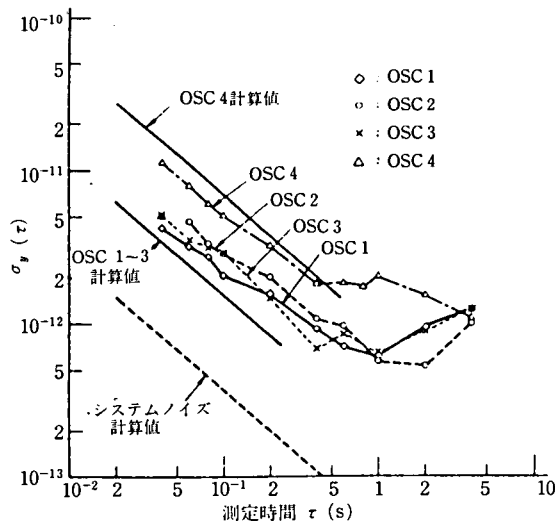


図 2.12 ゼロビート法による測定結果

となる。この θ_n については、 $\mathcal{L}(f)$ 測定の際のシステムノイズとして $\mathcal{L}(f)$ の形で測定できる。このうち、 $f \geq 20$ Hz で f^{-1} に比例する $\mathcal{L}(f)$ の部分が $\sigma_y(\tau)$ に及ぼす影響を計算し、これを「システムノイズ計算値」として図示した。また、「OSC. 1~3 計算値」や「OSC. 4 計算値」も上と同様に各発振器での $\mathcal{L}(f)$ の f^{-1} に比例する部分を用いて計算したものである。OSC. 4 については、 $\sigma_y(\tau)$ 測定値の τ に対する傾斜は計算値と良く合っているが、OSC. 1~3 については、傾斜も値そのものもあまり良く合っていない。これは、 $\mathcal{L}(f)$ の測定値から f^2 の形のスペクトルをあてはめる精度が不十分なことおよび $f < 20$ Hz で $\mathcal{L}(f)$ 測定が行われていないことなどが原因と思われる。

なお、この測定装置で測定できる平均化時間 τ の下限は、PLL の帯域幅約 60 Hz から、10~20 ms である。この帯域幅の拡大(主として増幅器利得の増大による)により 1 桁改善の余地はある。

2.3.3 結 論

- (1) 位相同期ループを利用し、発振器周波数のオフセットと周波数通倍を行うことなく、平均化時間が 10~20 ms 以上の範囲で高精度の周波数安定度の測定ができる。
- (2) 適用できる平均化時間の下限(現状では 10~20 ms)はループの帯域幅に逆比例する。帯域幅は増幅器利得を上げるにより拡大できるが、ループの安定性の点から電圧増幅度の限界は現状では 10^4 くらいである。
- (3) 測定装置自身の雑音(システムノイズ)は現状では $4 \times 10^{-14} \tau^{-1}$ ($\tau \geq 20$ ms) と推定されるが、これのより合理的な評価法が望まれる。
- (4) この測定法は同一周波数、例えば 5 MHz の高安定水晶発振器または原子周波数標準器の周波数安定度測定に適している。周波数そのものの測定には不向きである。

2.4 測定値からの推定法

2.4.1 周波数安定度の推定法⁽³⁾

高安定度の水晶発振器や原子周波数標準器など、一般に周波数標準器の周波数安定度を精密に測定、評価することは、標準器を種々の目的に有効に利用する場合重要である。しかし、標準器の安定度測定では、2.2 で述べたアンモニア・メーザのような基準がある場合は少なく、ふつうは標準器の相互比較によらざるを得ない。そこで、周波数標準の維持と標準電波発射に用いていた 100 kHz の電橋安定型水晶発振器の相互周波数比較から個々の発振器の短時間の周波数安定度を推定する方法と結果につき述べる。

100 kHz 水晶発振器

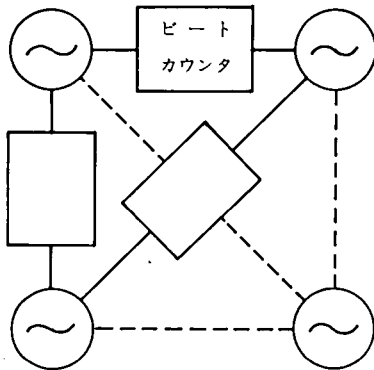


図 2.13 ビート・カウンタによる周波数相互比較

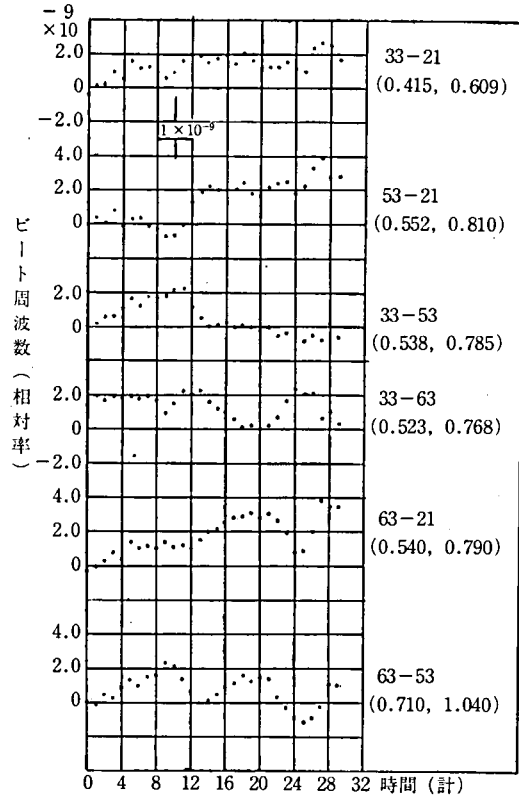


図 2.14 100 KHz 水晶発振器の相互周波数変動

(1) 測定方法

図 2.13 に示すように、100 kHz 水晶発振器をビート・カウンタを介して相互接続し、約 30 分間のビートをカウンタ（度数計）で読みとり、これを平均ビート周波数に換算する。度数計の読み（整数値）に対する時間間隔（約 30 分）を±1 秒以内の精度で測定することにより、換算された平均ビート周波数の測定精度を± 1×10^{-10} に保つことができる。

このような測定を約 30 分ごとに約 30 時間行った結果が図 2.14 である。図で例えば“53-21”と記したデータは“OSC. 53”と“OSC. 21”のビート周波数を 100 kHz で基準化したもので、（ ）内の数字は周波数変動の標準偏差の 95% 信頼区間を示し、桁はすべて 10^{-9} である。なお、同時に水晶発振器が設置されている地下恒温室の温度と発振器への供給電源電圧の測定を行ったが、共にほとんど一定値を示し、発振器周波数との相関は明らかではなかった。

(2) 周波数変動の推定方法

100 kHz 水晶発振器の周波数変動に対し、次のような正規線形回帰モデルを適用する。

(a) 時刻 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ における“OSC. k ” ($k=1, 2, 3, \dots$) の周波数 y_{ik} は正規分布 $N(a_k + b_k x_i, \sigma_k^2)$ に従う。

(b) $x_i \neq x_j$ に対し, y_{ik}, y_{jk} ($i, j=1, 2, \dots, N; k=1, 2, \dots$) は直線的傾向を除けば独立である。すなわち

$$E(y_{ik} - a_k - b_k x_i)(y_{jk} - a_k - b_k x_j) = 0 \quad (2.19)$$

これを変形して

$$E(y_{ik} \cdot y_{jk}) = (a_k + b_k x_i)(a_k + b_k x_j) \quad (2.20)$$

(c) 発振器の周波数は他の発振器とは独立に変動する。すなわち,

$$E(y_{ik} \cdot y_{il}) = (a_k + b_k x_i)(a_l + b_l x_j) \quad (2.21)$$

ここで

$$i, j=1, 2, \dots, N; k, l=1, 2, \dots$$

この測定で実測されるのは, 各発振器の周波数 y_{ik} ではなく, 発振器相互のビート周波数 $y_i(k, l)$ である。すなわち

$$y_i(k, l) = y_{ik} - y_{il} \quad (2.22)$$

である。 y_{ik} は思考上の測定値であり, この分布を考える。

OSC. k についての母集団パラメータ a_k, b_k および σ_k^2 の最尤推定値 \hat{a}_k, \hat{b}_k および $\hat{\sigma}_k^2$ は周知のように次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_k &= \bar{y}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{ik} \\ \hat{b}_k &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_{ik} - \bar{y}_k)}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \\ \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{ik} - \hat{a}_k - \hat{b}_k x_i)^2 \quad (2.24)$$

ここで N は測定値の個数である。また

$$E(\hat{a}_k) = a_k, E(\hat{b}_k) = b_k \quad (2.25)$$

ビート周波数 $y_i(k, l)$ ——時刻 x_i における OSC. k と OSC. l のビート周波数——の分布は, y_{ik}, y_{il} が上述の仮定(c)により独立であるから, (2.22)式により $N(a_{kl} + b_{kl}x_i, \sigma_{kl}^2)$ なる正規分布に従う。ここで

$$a_{kl} = a_k - a_l, \quad b_{kl} = b_k - b_l \quad (2.26)$$

$$\sigma_{kl}^2 = \sigma_k^2 + \sigma_l^2 \quad (2.27)$$

とおいてある。

これらの母集団パラメータの最尤推定値 \hat{a}_{kl} , \hat{b}_{kl} , $\hat{\sigma}_{kl}^2$ も (2.23), (2.24) 式と全く同様次のように与えられる (これらは実測データから計算できる)

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{kl} &= \bar{y}_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k, l) \\ \hat{b}_{kl} &= \frac{\sum_{i=1}^N [y_i(k, l) - \bar{y}_{kl}](x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

$$\hat{\sigma}_{kl}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i(k, l) - \hat{a}_{kl} - \hat{b}_{kl}x_i]^2 \quad (2.29)$$

(2.22), (2.23), (2.26), (2.28) から明らかに

$$\hat{a}_{kl} = \hat{a}_k - \hat{a}_l, \quad \hat{b}_{kl} = \hat{b}_k - \hat{b}_l \quad (2.30)$$

簡単のため、発振器の個数を 3 とし、(2.27) 式を $\sigma_k^2 (k=1, 2, 3)$ について解けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2) \\ \sigma_2^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \\ \sigma_3^2 &= \frac{1}{2}(-\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

$\sigma_k^2 (k=1, 2, 3)$ の推定値として次の $\hat{\sigma}_k^2$ を採用する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{N}{2(N-2)}(\hat{\sigma}_{12}^2 + \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{23}^2) \\ \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{N}{2(N-2)}(\hat{\sigma}_{12}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 + \hat{\sigma}_{23}^2) \\ \hat{\sigma}_3^2 &= \frac{N}{2(N-2)}(-\hat{\sigma}_{12}^2 + \hat{\sigma}_{13}^2 + \hat{\sigma}_{23}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

上式における $\frac{N\hat{\sigma}_{kl}^2}{\sigma_{kl}^2} (k, l=1, 2, 3)$ は自由度 2 のカイ 2 乗分布 $\chi^2(N-2)$ に従うから、(2.31)

および (2.32) 式より、 $\hat{\sigma}_k^2$ の平均値 (期待値) は

$$E(\hat{\sigma}_k^2) = \sigma_k^2 \quad (k=1, 2, 3) \quad (2.33)$$

すなわち、 $\hat{\sigma}_k^2$ は σ_k^2 の不偏推定値を与える。 $\hat{\sigma}_k^2$ の分布の決定は困難であるが、 $\hat{\sigma}_k^2$ の分散 Var

σ_{kl}^2 は付録 2 により次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Var } \bar{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{N-2}(\sigma_1^4 + \sigma_{12}^2 \sigma_{31}^2) \\ \text{Var } \bar{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{N-2}(\sigma_2^4 + \sigma_{12}^2 \sigma_{23}^2) \\ \text{Var } \bar{\sigma}_3^2 &= \frac{1}{N-2}(\sigma_3^4 + \sigma_{31}^2 \sigma_{23}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

このようにして、 $\bar{\sigma}_1^2$, $\bar{\sigma}_2^2$, $\bar{\sigma}_3^2$ の平均値と分散が計算できた。

(3) 推定結果

(a) OSC. 33, OSC. 63, OSC. 53 の 3 台を採り、それぞれ OSC. 1, OSC. 2, OSC. 3 と名付ける。図 2.14 の測定値 ($N=59$) からビート周波数の分散 σ_{kl}^2 の推定値 $\bar{\sigma}_{kl}^2$ を計算すれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{12}^2 &= 0.369 \times 10^{-18} \\ \bar{\sigma}_{23}^2 &= 0.679 \times 10^{-18} \\ \bar{\sigma}_{31}^2 &= 0.389 \times 10^{-18} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

(2.35) 式を (2.32) 式に代入し

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_1^2 &= 0.0403 \times 10^{-18} \\ \bar{\sigma}_2^2 &= 0.341 \times 10^{-18} \\ \bar{\sigma}_3^2 &= 0.361 \times 10^{-18} \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

次に $\text{Var } \bar{\sigma}_i^2$ などの計算では、(2.34) 式における母集団パラメータの代りにこれらの推定値 (2.35) および (2.36) 式を用いる。図 2.14 に示した σ_{12} , σ_{23} などの信頼区間から、 $\bar{\sigma}_{12}$, $\bar{\sigma}_{23}$ などは相当精密に求められるので、このような置き換えを行ってもさほど推定精度には影響しない。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\text{Var } \bar{\sigma}_1^2} &= 0.0505 \times 10^{-18} \\ \sqrt{\text{Var } \bar{\sigma}_2^2} &= 0.0804 \times 10^{-18} \\ \sqrt{\text{Var } \bar{\sigma}_3^2} &= 0.0832 \times 10^{-18} \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

(2.37) 式は (2.36) 式で与えられる推定値 $\bar{\sigma}_1^2$, $\bar{\sigma}_2^2$ などの標準偏差に相当する。

(b) 上記と全く同様のことを OSC. 33 (OSC. 1), OSC. 53 (OSC. 3) および OSC. 21 (OSC. 4 とする) の組について行えば

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_1^2 &= 0.108 \times 10^{-18} \\ \bar{\sigma}_3^2 &= 0.299 \times 10^{-18} \\ \bar{\sigma}_4^2 &= 0.132 \times 10^{-18} \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

表 2.3 100 kHz 水晶発振器周波数の分散とその標準
偏差

発振器	発振器周波数の分散の推定値($\times 10^{-18}$)	
	(a)	(b)
No. 1 (OSC. 33)	0.040 ± 0.050	0.108 ± 0.042
No. 2 (OSC. 63)	0.341 ± 0.080	—
No. 3 (OSC. 53)	0.361 ± 0.083	0.299 ± 0.066
No. 4 (OSC. 21)	—	0.132 ± 0.044

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\text{Var } \hat{\sigma}_1^2} &= 0.0423 \times 10^{-18} \\ \sqrt{\text{Var } \hat{\sigma}_3^2} &= 0.0661 \times 10^{-18} \\ \sqrt{\text{Var } \hat{\sigma}_4^2} &= 0.0445 \times 10^{-18} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

以上 (a), (b) の結果をまとめて表 2.3 に示す。この表で、同じ発振器の分散は (a), (b) で一致せねばならないが、事実これらは標準偏差の範囲内で一致している。発振器周波数の分散はこの実験では大体 0.4×10^{-18} 以下であるが、OSC. 1 (OSC. 33) と OSC. 4 (OSC. 21) は他の 2 台よりも数等優れていることが分る。表 2.3 の結果を周波数（基準化周波数）の標準偏差に計算し直すと、30 時間にわたって測定した平均化時間 30 分の周波数安定度はおよそ $0.3 \times 10^{-9} \sim 0.6 \times 10^{-9}$ となる。

この実験の場合、このような周波数変動の原因としては、100 kHz 水晶発振子の周波数温度係数が考えられる。その値はおよそ $10^{-8}/^{\circ}\text{C}$ の程度である。一方、発振器が設置されている地下室温度の実験期間中の変動は、測定精度 $\pm 0.01^{\circ}\text{C}$ ではほとんど認められなかった。しかし、この変動を 0.01°C と仮定すると、発振子の周波数温度係数から考えて 10^{-10} 程度の周波数変動は起り得る。これの確認には、温度測定精度の改善がまず必要である。

以上の結果、次のことが明らかになった。

(i) 3 台の発振器相互のビート周波数の測定値に正規線形回帰モデルを適用して得たビート周波数の分散から個々の発振器の分散を推定する際の推定精度を分散の標準偏差の形で求めることができた。

(ii) この方法で推定した、4 台の 100 kHz 水晶発振器の周波数の分散は、平均化時間 30 分、全体の測定期間 30 時間で、 $0.1 \times 10^{-18} \sim 0.4 \times 10^{-18}$ である——周波数安定度で表現すると $0.3 \times 10^{-9} \sim 0.6 \times 10^{-9}$ である。また、異なる組合せによる同一発振器の分散推定値はその標準

偏差の範囲内で一致した。

(iii) 周波数変動の要因は水晶発振子の周波数温度特性と地下室温度の変動と思われるが実験ではその相関関係を明確にできなかった。

(iv) この推定方法は、多数の周波数標準器の相互比較値から平均周波数標準を求める際に必要な個々の標準器の重みの決定に利用できる。

2.4.2 周波数（平均レート）の推定法⁽⁴⁾

ここでは、主として周波数標準器の平均レート（平均周波数偏差率に対応）の新しい推定法につき述べる。長期間連続運転可能な原子周波数標準器を周波数標準および標準時計として使用する場合、その測定方法は時計面または位相の定時測定が基本となる。そのため、時計面と平均レートの推定が同時に正確に行えることが望ましい。ここでは、正規回帰モデルを適用して時計面長期傾向の推定を行い、ここで得られた標本回帰式の差分係数から平均レートを推定し、時計面は言うまでもなく、平均レートの推定精度を真値の信頼限界の形で求める。なお、測定および推定時点を固定したときの回帰式がとる値の信頼限界ではなく、回帰式または回帰関数そのものの信頼限界の一般式をも導いている。

(1) 正規線形回帰モデル⁽³¹⁾

周波数標準器の時計面または平均レートが、次式のように、誤差をふくまない k 個の独立変数 x_1, x_2, \dots, x_k の従属変数として表されるとする。

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k + \varepsilon \quad (2.40)$$

ここで、 ε は平均値 0、分散 σ^2 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数である。また、 x_1, x_2, \dots, x_k は 1 次的に独立とする。すなわち、 y の分布は平均値が

$$E(y) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k \quad (2.41)$$

分散が σ^2 なる正規分布 $N(\sum_{p=1}^k a_px_p, \sigma^2)$ である。この平均値は母回帰関数または母回帰式であり、時計面または平均レートの長期傾向に相等する。また、(2.40) 式の ε は短期変動に対応する。 x_1, x_2, \dots, x_k の n 通りの値

$$x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki} \quad (i=1, 2, \dots, n; n > k)$$

に対し、標本 y_i ($i=1, 2, \dots, n$) を測定から得たとすれば

$$y_i = a_1x_{1i} + \dots + a_kx_{ki} + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.42)$$

であり、 ε_i ($i=1, 2, \dots, n$)は互いに独立である。

a_1, a_2, \dots, a_k および σ^2 の最尤推定値は次の諸式で与えられる。

$$\hat{a}_p = \sum_{q=1}^k a^{pq} a_{oq}, \quad p=1, 2, \dots, k \quad (2.43)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi} \right)^2 \quad (2.44)$$

ここで

$$a_{pq} = \sum_{i=1}^n x_{pi} x_{qi}, \quad p, q=1, 2, \dots, k \quad (2.45)$$

$$a_{op} = \sum_{i=1}^n y_i x_{pi}, \quad p=1, 2, \dots, k \quad (2.46)$$

$$a^{pq} = \frac{A_{pq}}{A} = \frac{\text{行列式 } |a_{pq}| \text{ における要素 } a_{pq} \text{ の余因子}}{\text{行列式 } |a_{pq}|} \quad (2.47)$$

(2.43)式による \hat{a}_p ($p=1, 2, \dots, k$)を用いた標本回帰式の値 $\hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \dots + \hat{a}_k x_k$ も正規分布をなし、平均値は

$$E\left(\sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p\right) = \sum_{p=1}^k a_{pp} x_p \quad (2.48)$$

分散は

$$Var\left(\sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p\right) = \sigma^2 \sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q \quad (2.49)$$

(2.49)式は、 x_p ($p=1, 2, \dots, k$)の値を定めたときの標本回帰式 $\sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p$ の推定精度を示すが、母分散 σ^2 が既知であることが必要である。

σ^2 が未知の場合、母回帰式がとる値の信頼限界 (危険率 α) は次式で与えられる⁽³¹⁾ (付録2 参照)。

$$y = \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p \pm s t_{n-k}(\alpha) \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q} \quad (2.50)$$

ここで

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi} \right)^2 \quad (2.51)$$

また、 $t_{n-k}(\alpha)$ は自由度 $n-k$ の t 分布において

$$Pr[|t_{n-k}| > t_{n-k}(\alpha)] = \alpha \quad (2.52)$$

となるような値であり、 t 分布表から求まる。

(2) 時計面の推定

周波数標準器（水晶時計または原子時計）の時計面に，ふつう行われるように，時刻 t についての 2 次式を当てはめる場合を考える。母回帰式は (2.41) 式で $k=3$ とおいた式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

において， $a_1=a$ ， $a_2=b$ ， $a_3=c$ および $x_1=1$ ， $x_2=t$ ， $x_3=t^2$ とおいた式である。時計面の定時測定で得られる標本は (2.42) 式に対応して次のように表されるはずである。

$$\phi_i = a + bt_i + ct_i^2 + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.53)$$

(2.45) 式の $a_{pq}(=a_{qp})$ を要素とする行列式 A は

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & n\bar{t} & \sum t_i^2 \\ n\bar{t} & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{vmatrix} \quad (2.54)$$

ここで

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (2.55)$$

であり，(2.54) 式の $\sum t_i^2$ ， $\sum t_i^3$ などは $\sum_{i=1}^n t_i^2$ ， $\sum_{i=1}^n t_i^3$ などをそれぞれ表し，以下同様である。

また，(2.47) 式の逆行列要素 a^{pq} は次の (2.56)～(2.60) 式で与えられる。

$$a^{11} = [\sum t_i^2 \cdot \sum t_i^4 - (\sum t_i^3)^2] / A \quad (2.56)$$

$$a^{12} = a^{21} = (\sum t_i^2 \sum t_i^3 - n\bar{t} \sum t_i^4) / A \quad (2.57)$$

$$a^{13} = a^{31} = [n\bar{t} \sum t_i^3 - (\sum t_i^2)^2] / A \quad (2.58)$$

$$a^{22} = [n \sum t_i^4 - (\sum t_i^2)^2] / A \quad (2.59)$$

$$a^{23} = a^{32} = n(\bar{t} \sum t_i^2 - \sum t_i^3) / A \quad (2.60)$$

$$a^{33} = n \sum (t_i - \bar{t})^2 / A \quad (2.61)$$

a ， b ， c の最尤推定量 \hat{a} ， \hat{b} ， \hat{c} は (2.43)，(2.45)，(2.46)，(2.47) 式から次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{12} & a^{22} & a^{23} \\ a^{13} & a^{23} & a^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum \phi_i \\ \sum \phi_i t_i \\ \sum \phi_i t_i^2 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

(2.62) 式の \hat{a} ， \hat{b} ， \hat{c} による $\hat{a} + \hat{b}t + \hat{c}t^2$ (標本回帰式) が時計面の (長期傾向の) 推定量である。

これは前述のように正規分布

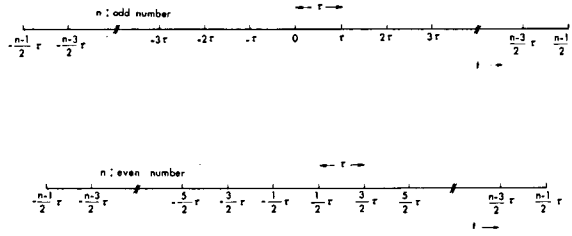


図 2.15 等間隔で原点に關し対称な測定時点の配置

$N(a+bt+ct^2, [a^{11}+2a^{12}t+(a^{22}+2a^{13})t^2+2a^{23}t^3+2a^{33}t^4]\sigma^2)$ をする

また、時刻 t を定めたとき、母回帰式 $a+bt+ct^2$ がとる値の信頼限界 (危険率 α) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \hat{a} + \hat{b}t + \hat{c}t^2 \pm st_{n-3}(\alpha) \cdot \\ &\quad \sqrt{a^{11}+2a^{12}t+(a^{22}+2a^{13})t^2+2a^{23}t^3+a^{33}t^4} \\ \text{ここで} \quad s^2 &= \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n [\phi_i - (\hat{a} + \hat{b}t + \hat{c}t^2)]^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

測定時刻 t_i ($i=1, 2, \dots, n$) が図 2.15 のように等間隔 τ でかつ、原点に關して対称に配置されているとすると、(2.55)式から、 $\bar{t}=0$ 。また、(2.54), (2.56)~(2.60)式において、 $\sum t_i^3=0$ となる。また、 n が奇数、偶数いずれの場合でも

$$\sum_{i=1}^n t_i^2 = \frac{n}{12}(n^2-1)\tau^2 \quad (2.64)$$

$$\sum_{i=1}^n t_i^4 = \frac{n}{240}(n^2-1)(3n^2-7)\tau^4 \quad (2.65)$$

となるから、(2.54)式において

$$A = \frac{n^3}{2160}(n^2-1)^2(n^2-4)\tau^6 \quad (2.66)$$

したがって、(2.56)~(2.60)式から

$$a^{11} = \frac{3(3n^2-7)}{4n(n^2-4)} \quad (2.67)$$

$$a^{12} = a^{21} = 0 \quad (2.68)$$

$$a^{13} = a^{31} = -\frac{15}{n(n^2-4)\tau^2} \quad (2.69)$$

$$a^{22} = \frac{12}{n(n^2-1)\tau^2} \quad (2.70)$$

$$a^{23} = a^{32} = 0 \quad (2.70')$$

$$a^{33} = \frac{180}{n(n^2-1)(n^2-4)\tau^4} \quad (2.71)$$

(2.67)～(2.71) 式を (2.62) 式に代入すれば、母回帰式 $a+bt+ct^2$ がとる値の信頼限界 (危険率 α , 信頼係数 $1-\alpha$) は次式で与えられる。

$$\phi = \hat{a} + \hat{b}t + \hat{c}t^2 \pm s\Phi_2(n, \alpha, t/\tau) \quad (2.72)$$

ここで

$$\Phi_2(n, \alpha, t/\tau) = t_{n-3}(\alpha)\Phi_2^*(n, t/\tau) \quad (2.73)$$

$$\Phi_2^*(n, t/\tau) = \sqrt{\frac{3(3n^2-2)}{5n(n^2-1)}} \cdot \sqrt{1 + \frac{300}{(n^2-4)(3n^2-2)} \left[\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 - \frac{n^2+1}{20} \right]^2} \quad (2.74)$$

$$\hat{a} = \frac{3}{4n(n^2-4)} \left[(3n^2-7) \sum_{i=1}^n \phi_i - \frac{20}{\tau^2} \sum_{i=1}^n \phi_i t_i^2 \right] \quad (2.75)$$

$$\hat{b} = \frac{12}{n(n^2-1)\tau^2} \sum_{i=1}^n \phi_i t_i \quad (2.76)$$

$$\hat{c} = \frac{15}{n(n^2-4)} \left[-\frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n \phi_i + \frac{12}{(n^2-1)\tau^4} \sum_{i=1}^n \phi_i t_i^2 \right] \quad (2.77)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n [\phi_i - (\hat{a} + \hat{b}t_i + \hat{c}t_i^2)]^2 \quad (2.78)$$

図 2.16(A), 2.16(B), 2.16(C) および 2.16(D) は、測定個数 n が 10, 30, 100 および 300 の場合の $\Phi_2(n, \alpha, t/\tau)$ の値をいずれも信頼係数 $(1-\alpha)$ が 0.75, 0.95, 0.99 の場合について示している。図で $t/\tau=0$ は図 2.15 から明らかなように、全測定期間の中央に相当し、破線は全測定期間の両側における外そう値を示す。

なお、母回帰式が 1 次式 $a+bt$ のときも全く同様である。 a, b の最尤推定値は (2.62) 式と同様

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{12} & a^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \phi_i \\ \sum \phi_i t_i \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

ここで

$$a^{11} = \frac{\sum t_i^2}{n \sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (2.80)$$

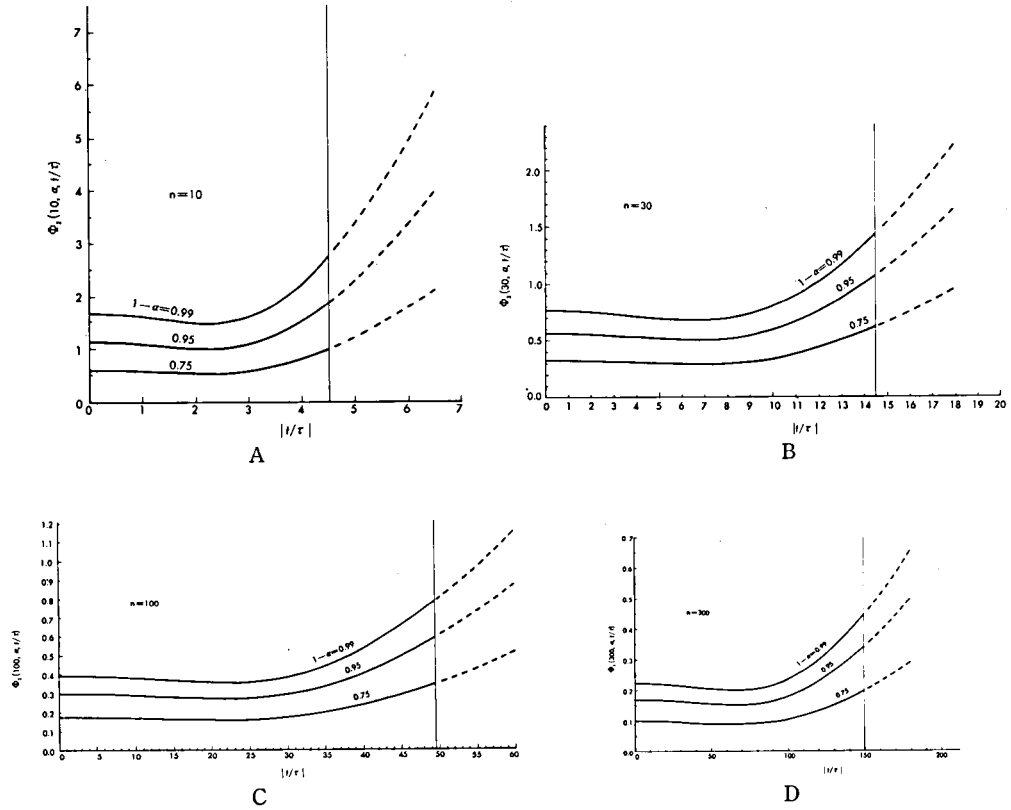


図 2.16 時計面 (2 次式) の信頼限界

$\phi = \hat{a} + \hat{b}_i + \hat{c}_i t^2 \pm s \Phi_2(n, \sigma, t/\tau)$, (2-72) 式

$$a^{12} = a^{21} = -\frac{\bar{t}}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (2.81)$$

$$a^{22} = \frac{1}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (2.82)$$

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum t_i \quad (2.55)$$

(2.63) 式に対応する信頼限界は

$$\begin{aligned} \phi &= \hat{a} + \hat{b}t \pm st_{n-2}(\alpha) \sqrt{a^{11} + 2a^{12}t + a^{22}t^2} \\ &= \hat{a} + \hat{b}t \pm st_{n-2}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t - \bar{t})^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

ここで

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [\phi_i - (\hat{a} + \hat{b}t)]^2 \quad (2.84)$$

n 個の測定時点が等間隔 τ で配置されているときは、(2.64) 式と同様にして

$$\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 = \frac{n}{12} (n^2 - 1) \tau^2 \quad (2.85)$$

したがって

$$\phi = \hat{a} + \hat{b}t \pm st_{n-2}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{n} \left[1 + \frac{12}{n^2 - 1} \left(\frac{t - \bar{t}}{\tau} \right)^2 \right]} \quad (2.86)$$

この式で \bar{t} に時間の原点を移した形にすれば

$$\phi = \hat{a} + \hat{b}t \pm s\Phi_1(n, \alpha, t/\tau) \quad (2.87)$$

ここで

$$\Phi_1(n, \alpha, t/\tau) = t_{n-2}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{n} \left[1 + \frac{12}{n^2 - 1} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right]} \quad (2.88)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (2.89)$$

$$\hat{b} = \frac{12}{n(n^2 - 1)\tau^2} \sum_{i=1}^n \phi_i t_i \quad (2.90)$$

図 2.17(A), 2.17(B), 2.17(C) および 2.17(D) は、測定個数がそれぞれ 10, 30, 100 および 300 の場合の $\Phi_1(n, \alpha, t/\tau)$ の値をいずれも信頼係数が 0.75, 0.95, 0.99 の場合について示している。

(3) 平均レートの推定

標準用時計の平均レートの推定値はふつう時計面比較から間接的に求める。その方法には、時計面の差分係数を平均レートの標本としてこれに多項式などをあてはめる方法と、(2) で求めた時計面の標本回帰式の差分係数から求める方法がある。前者の方法で逐次に時計面の差分係数をとって行くと隣接した平均レートが独立でなく -0.5 の相関係数を持つので、正規回帰による推定を形式上行ってもその推定精度などに誤りがおこる。また、平均レートのデータを相互に独立になるようにとる場合でも、その推定精度は後者は劣る。したがって、ここでは後者の方法を採用し、時計面についての 2 次の標本回帰式から平均レートを推定することから始める。

時計面に関する 2 次の母回帰式

$$\phi(t) = a + bt + ct^2 \quad (2.91)$$

において、時計面の測定時刻 t_j および t_k 間の平均レート $r(t_j, t_k)$ は次式のように、 $t_k - t_j$ に関する $\phi(t)$ の差分係数で与えられる。

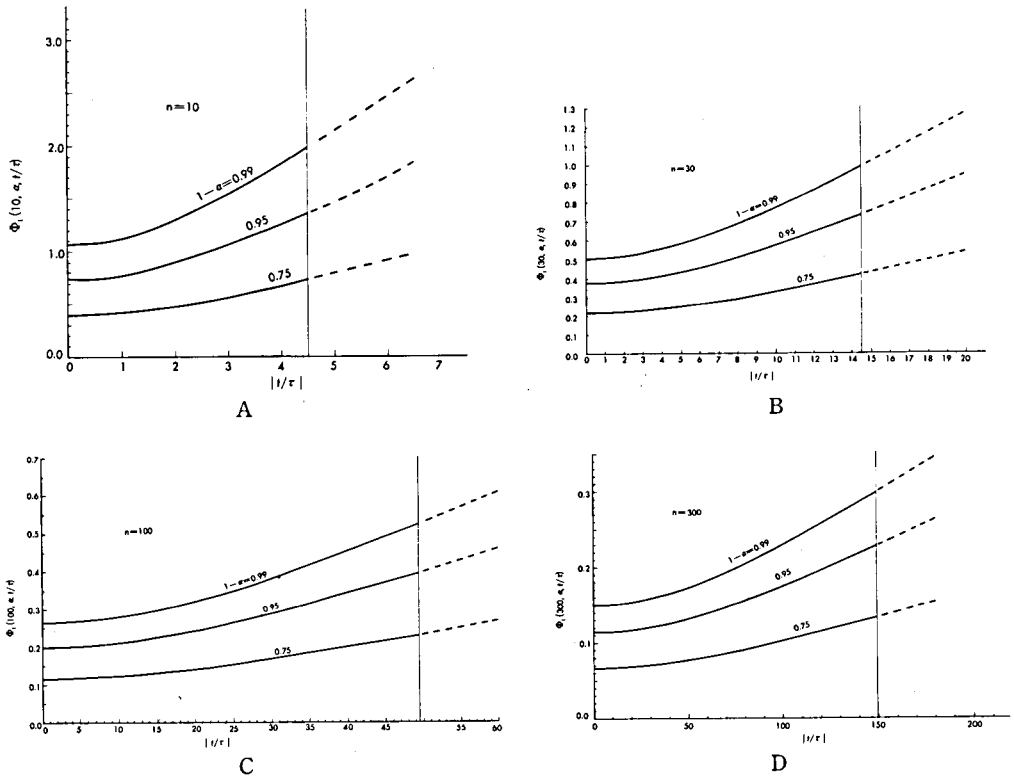


図 2.17 時計面 (1 次式) の信頼限界
 $\phi = \hat{a} + \hat{b}_t \pm s \Phi_1(n, \sigma, t/\tau)$, (2.87) 式

$$r(t_j, t_k) = \frac{\phi(t_k) - \phi(t_j)}{t_k - t_j} = b + 2c \left(\frac{t_j + t_k}{2} \right) \quad (2.92)$$

上式から, $r(t_j, t_k)$ は 2 点の中点の座標 $(t_j + t_k)/2$ できまり, それらの間隔 $(t_k - t_j)$ には関係しない。そこで, $r(t_j, t_k)$ の推定値を次のように採る。

$$\hat{r}(t_j, t_k) = \hat{b} + 2\hat{c} \left(\frac{t_j + t_k}{2} \right) \quad (2.93)$$

ここで, \hat{b} および \hat{c} は (2.62) 式, さらに具体的には, (2.75)~(2.77) 式で与えられるものを使う。確率変数 \hat{r} は正規分布をなし, 平均値は (2.48) 式から

$$E[\hat{r}(t_j, t_k)] = b + 2c \left(\frac{t_j + t_k}{2} \right) \quad (2.94)$$

また, 分散は

$$Var[\hat{r}(t_j, t_k)] = Var(\hat{b}) + (t_j + t_k)^2 Var(\hat{c}) + 2(t_j + t_k) Cov(\hat{b}, \hat{c}) \quad (2.95)$$

$$\text{Var}[\hat{r}(t_j, t_k)] = \sigma^2 [a^{22} + 2(t_j + t_k)a^{23} + (t_j + t_k)^2 a^{33}] \quad (2.96)$$

ここで、 a^{22} 、 a^{23} および a^{33} はそれぞれ (2.59)、(2.60) および (2.61) 式で与えられている。(2.96) 式において、前と同様に測定時点が図 2.15 のように、ゼロ中心の等間隔配置になっているときは、(2.70)、(2.70') および (2.71) 式を用いて

$$\text{Var}[\hat{r}(t_j, t_k)] = \frac{12}{n(n^2-1)} \left[1 + \frac{60}{n^2-4} \left(\frac{t_j + t_k}{2\tau} \right)^2 \right] \frac{\sigma^2}{\tau^2} \quad (2.97)$$

付録 2 と同様の方法により、 $r(t_j, t_k)$ の信頼限界（信頼係数 $1-\alpha$ ）は次式で示される。

$$r = \hat{b} + 2\hat{c}t \pm (s/\tau) R_2(n, \alpha, t/\tau) \quad (2.98)$$

ここで

$$s^2 = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n [\phi_i - (\hat{a} + \hat{b}t_i + \hat{c}t_i^2)]^2 \quad (2.78)$$

$$R_2(n, \alpha, t/\tau) = t_{n-3}(\alpha) \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)} \left[1 + \frac{60}{n^2-4} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right]} \quad (2.99)$$

$$t = (t_j + t_k)/2 \quad (2.100)$$

(2.99) 式の $R_2(n, \alpha, t/\tau)$ の値を時計面の測定個数 n が 10, 30, 100 および 300 の場合につき

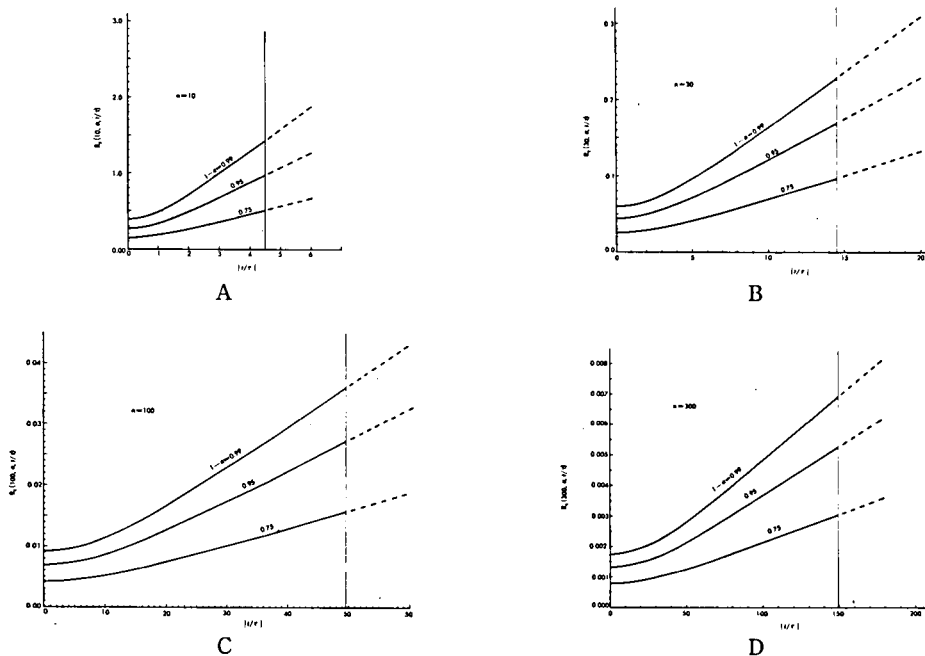


図 2.18 平均レート（時計面 2 次式）の信頼限界
 $\gamma = \hat{b} + 2\hat{c}t \pm (s/\tau) R_2(n, \sigma, t/\tau)$, (2.98 式)

計算し、それぞれ図 2.18(A), 2.18(B), 2.18(C) および 2.18(D) に示す。

次に時計面の母回帰式が

$$\phi = a + bt \quad (2.101)$$

の場合、平均レートの推定値 \hat{b} は既に (2.79) 式で与えられている。式 $Var(\hat{a}_p) = a^{pp}\sigma^2$ と (2.82) 式から

$$E(\hat{b}) = b, \quad Var(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (2.102)$$

したがって b の信頼限界 (信頼係数 $1-\alpha$) は

$$r = \hat{b} \pm st_{n-2}(\alpha) \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}} \quad (2.103)$$

ここで

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [\phi_i - (\hat{a} + \hat{b}t_i)]^2 \quad (2.84)$$

前と同様 t_i が \bar{t} を中心に等間隔 τ で配置されているとき、(2.103) 式は (2.85) 式を用いて

$$\left. \begin{aligned} r &= \hat{b} \pm (s/\tau) R_1(n, \alpha) \\ R_1(n, \alpha) &= t_{n-2}(\alpha) \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

R_1 は t に無関係である。図 2.19 は $R_1(n, \alpha)$ の値を信頼係数が 0.75, 0.95 および 0.99 の場合につき n の関数として示す。

(4) 数値例

(2) および (3) で導いた時計面および周波数の推定に関する計算式と図を用いた数値例を挙げる。いま、ある標準時計を基準として、時計 1 および 2 の時計面測定を 24 時間毎に 30 回行い、時計 1 の測定値には 1 次式を、時計 2 には 2 次式を当てはめ、それぞれ標準偏差 $s = 0.05 \mu s$ および $0.2 \mu s$ を得たと仮定する。これらの時計の時計面および周波数 (平均レート) の信頼限界 (信頼係数 0.95) を測定期間の中央および両端で計算した結果を表 2.4 に示す。この場合、時計面回帰式の次数が 2 以下であるから、(2.92) 式に関連した議論により、平均レートおよびその信頼限界は、これらを求めようとする期間の midpoint の座標にのみ依存し (1 次式ではそれにも依存しない)、その期間の長さ、すなわち平均化時間には無関係である。

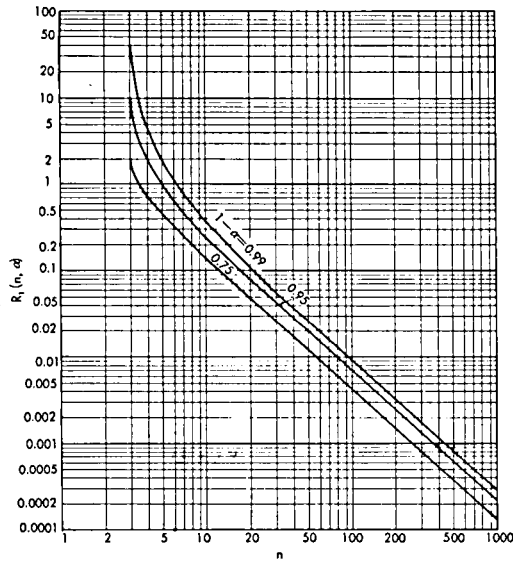


図 2.19 平均レート（時計面 1 次式）の信頼限界
 $\gamma = \hat{b} \pm (s/\tau) R_1(n, \sigma)$, (2.104) 式

表 2.4 信頼限界数値例

$1-\alpha=0.95, n=30, \tau=1$ 日

		時 計 1	時 計 2
標 本 標準偏差 s		$0.05 \mu\text{s}$ (仮定)	$0.2 \mu\text{s}$ (仮定)
s/τ		5.79×10^{-13}	2.31×10^{-12}
時計面 ϕ	中央	図 2.17 (B) から $\Phi_1=0.37$ (2.87) 式から $\bar{a} + \hat{b}_1 t \pm 0.018 \mu\text{s}$	図 2.16 (B) から $\Phi_2=0.56$ (2.72) 式から $\bar{a} + \hat{b}_2 t + \hat{c}_2 t^2 \pm 0.112 \mu\text{s}$
	両端	図 2.17 (B) から $\Phi_1=0.73$ (2.87) 式から $\bar{a}_1 + \hat{b}_1 t \pm 0.036 \mu\text{s}$	図 2.16 (B) から $\Phi_2=1.06$ (2.72) 式から $\bar{a}_2 + \hat{b}_2 t + \hat{c}_2 t^2 \pm 0.212 \mu\text{s}$
平 均 レ ー ト r	中央	図 2.19 から $R_1=0.043$ (2.104) 式から $\hat{b}_1 \pm 2.49 \times 10^{-14}$	図 2.18 図 (B) から $R_2=0.043$ (2.98) 式から $\hat{b}_2 + 2 \hat{c}_2 t \pm 9.93 \times 10^{-14}$
	両端		図 2.18 図 (B) から $R_2=0.168$ (2.98) 式から $\hat{b}_2 + 2 \hat{c}_2 t \pm 3.88 \times 10^{-13}$

(5) 回帰式の信頼限界について⁽⁴⁾

(2) および (3) で求めた時計面および平均レートの信頼限界は、変数 x_1, x_2, \dots, x_k または測定時点 t を与えたとき、回帰式がとる値の信頼限界であり、大抵の目的に適合する。しかし、個々の値ではなく、回帰式自体の信頼限界が必要な場合も起り得るので、以下これを導く。

(2.43)式で与えられる \hat{a}_p ($p=1, 2, \dots, k$) 全体は k 次元の正規分布をなし、その確率密度関数は

$$\left. \begin{aligned} f(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k) &= \frac{\sqrt{A}}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2}q_2} \\ q_2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{p,q=1}^k a_{pq}(\hat{a}_p - a_p)(\hat{a}_q - a_q) \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

ここで、 a_{pq} , A は (2.45) および (2.47) 式と同じものを用いる。

(2.105) 式の q_2 は自由度 k のカイ 2 乗分布をなす。また、(2.44) 式を用いて定義した

$$q_1 \equiv \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi} \right)^2 \quad (2.106)$$

は自由度 $n-k$ のカイ 2 乗分布をなし、 q_1 と q_2 が独立であることも周知の通りである。したがって

$$F_{n-k}^k \equiv \frac{q_2/k}{q_1/(n-k)} = \frac{\frac{1}{k} \sum_{p,q=1}^k a_{pq}(\hat{a}_p - a_p)(\hat{a}_q - a_q)}{s^2} \quad (2.107)$$

は自由度 k , $n-k$ の F 分布をする。ここで

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi} \right)^2 \quad (2.108)$$

この分布において、危険率 α に対して

$$p_r\{F_{n-k}^k > F_{n-k}^k(\alpha)\} = \alpha$$

となるような $F_{n-k}^k(\alpha)$ を F 分布表から求め、これを (2.107) 式に代入すると

$$\varphi(a_1, \dots, a_k) \equiv \sum_{p,q=1}^k a_{pq}(\hat{a}_p - a_p)(\hat{a}_q - a_q) - s^2 k F_{n-k}^k(\alpha) = 0 \quad (2.109)$$

は、点 (a_1, \dots, a_k) の信頼係数 $1-\alpha$ なる信頼限界 (超楕円曲面) を表す。この点がこの曲面上を動くとき、平面

$$f(a_1, \dots, a_k; x_1, \dots, x_k; y) \equiv \sum_{p=1}^k a_p x_p - y = 0 \quad (2.110)$$

の包絡面が求むるこの平面の信頼限界である⁽³¹⁾。

この包絡面は λ を未定常数とし

$$F \equiv f(a_1, \dots, a_k; x_1, \dots, x_k; y) + \lambda \varphi(a_1, \dots, a_k) \quad (2.111)$$

とおいたとき

$$\frac{\partial F}{\partial a_p} = 0 \quad (p=1, 2, \dots, k) \quad (2.112)$$

と (2.109) および (2.110) 式から求められる。以下付録 2 から

$$y = \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p \pm s \sqrt{k F_{n-k}^k(\alpha)} \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q} \quad (2.113)$$

ここで

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi} \right)^2 \quad (2.108)$$

また、 a^{pq} は (2.47) 式を用いる。(2.113) 式を前記の (2.50) 式と比較すると、 $s \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q}$ の係数に $\sqrt{k F_{n-k}^k(\alpha)}$ と $t_{n-k}(\alpha)$ の違いがある。両者の比を図 2.20 に示す。この比は $k=1$ では、すべての n, α について 1 に等しいが、変数の数 k とともに大きくなる。

2.4.3 結 論

- (i) 3 台の発振器相互のビート周波数の分散から個々の発振器の分散の推定精度を求めた。
- (ii) 周波数標準器の時計面をその測定値から得られる標本回帰多項式で推定し、その推定精度を母回帰式が各測定時点でとる値の信頼限界を求め、図表化した。

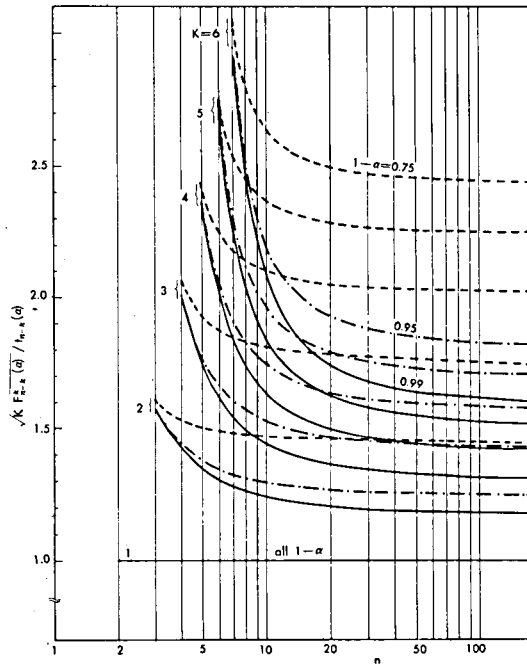


図 2.20 2 種類の信頼限界の比較
(2.50) 式と (2.113) 式

(iii) 時計面に対する上記の標本回帰多項式の差分係数で平均レート进行推定する場合の精度を (i) と同様信頼限界の形で新しく表現した。この方法は、時計面が正規分布を与えるとき、極めて正確なレート推定方法である。

(iv) 回帰式(母回帰式)自体の信頼限界を新しく計算し、測定時点をきめたとき母回帰式がとりうる値の信頼限界と比較し、これを図示した。

2.5 周波数標準器の安定度

第2.2節では、主としてアンモニアメーザを基準とした水晶発振器の安定度(図2.4, 2.6, 2.7)を、また第2.3節では、数台の水晶発振器相互の測定から個々の発振器の安定度(図2.12)を何れも時間領域で求め、その要因について考察した。本節では、付録3に記述の周波数安定度に関する理論を用いて周波数標準器、とくに高安定度の水晶発振器の安定度につき考察し、上述の測定結果と比較する。

高安定水晶発振器は一般に図2.21のような構成になっているが、安定度に関連する雑音源には次のものがある。図の帰還発振器内では、(1) 水晶振動子の等価抵抗の熱雑音、(2) 振動子とその付属回路による発振周波数の変動、(3) 能動素子のショット雑音と(4) フリッカ雑音($1/f$ 雑音)があり、発振器外ではAGC(自動利得制御)と緩衝用の増幅器における(3') ショット雑音と(4') フリッカ雑音などがある。

まず、(1)、(3)および(4)の雑音源につき考察する。(1)と(3)はそれぞれの周波数帯域幅で帯域制限された白色雑音であり、これらはそれぞれのSN比(信号対雑音比)に応じた白色位相雑音 $\Delta\theta_0$ と $\Delta\theta_A$ になる。一方、(4)の雑音は、第3.2節で述べるように、SN比とは無関係なフリッカ($1/f$)位相雑音 $\Delta\theta_{AF}$ となる。したがって、帰還発振器内の全位相雑音 $\Delta\theta$ は次式のようになる。

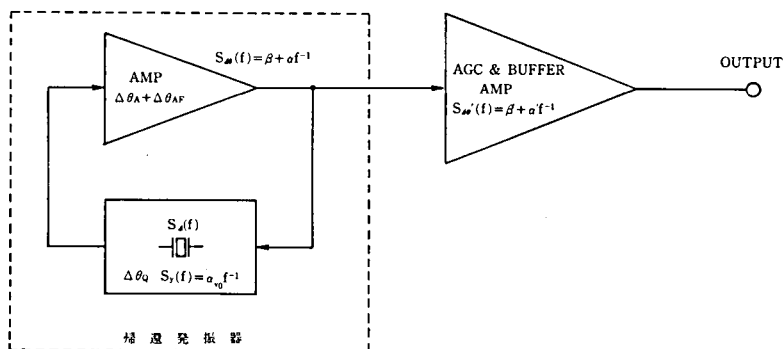


図2.21

$$\Delta\theta = \Delta\theta_w + \Delta\theta_{AF} \quad (2.114)$$

ここで、 $\Delta\theta_w$ は次式のような白色位相雑音である。

$$\Delta\theta_w = \Delta\theta_Q + \Delta\theta_A \quad (2.115)$$

また、 $\Delta\theta_w$ と $\Delta\theta_{AF}$ のパワースペクトル密度をそれぞれ $S_{\Delta\theta_w}(f)$ と $S_{\Delta\theta_{AF}}(f)$ とすると

$$S_{\Delta\theta_w}(f) = \beta, S_{\Delta\theta_{AF}}(f) = \alpha f^{-1} \quad (2.116)$$

と表わせるから、 $\Delta\theta$ のスペクトルは次式となる^{(20),(32)}。

$$S_{\Delta\theta}(f) = \beta + \alpha f^{-1} \quad (2.117)$$

いま、帰還発振器（帰還発振ループ）内に $\Delta\theta(t)$ なる微小位相変動が生じたとし、 $S_{\Delta\theta}(f)$ のフーリエ周波数 f が発振ループの帯域幅の半分、すなわち $\nu_0/2Q$ —— ν_0 は水晶振動子の共振周波数の公称値、 Q は振動子の動作時の Q 値——よりも小ならば、この回路の位相対発振周波数の関係式

$$\Delta\theta = 2Q\Delta\nu/\nu_0 \quad (2.118)$$

できる発振周波数の変化 $\Delta\nu$ を生じ、上記の $\Delta\theta$ が打ち消され、発振持続条件が満足される。逆にフーリエ周波数 f が $\nu_0/2Q$ よりも大ならば、振動子による位相制御作用はない。したがって、帰還発振器の位相雑音および周波数雑音のスペクトル密度をそれぞれ $S_\phi(f)$ および $S_{\Delta\nu}(f)$ とすれば、(2.118)式と上記から

(i) $f < \nu_0/2Q$ のとき

$$S_{\Delta\nu}(f) = (\nu_0/2Q)^2 S_{\Delta\theta}(f) \quad (2.119)$$

この式と付録3の(A3.5)式から

$$S_y(f) = (1/2Q)^2 S_{\Delta\theta}(f) \quad (2.120)$$

(ii) $f > \nu_0/2Q$ のとき

$$S_\phi(f) = S_{\Delta\theta}(f) \quad (2.121)$$

となる。そこで、付録3の関係式

$$S_y(f) = (f^2/\nu_0^2) S_\phi(f) \quad (A3.7)$$

を用いて (i) と (ii) をまとめると、次の2式を得る。

$$S_y(f) = S_{\Delta\theta}(f) (f/\nu_0)^2 [1 + (\nu_0/2Qf)^2] \quad (2.122)$$

$$S_\phi(f) = S_{\Delta\theta}(f) [1 + (\nu_0/2Qf)^2] \quad (2.123)$$

この2式と(2.117)式から

$$S_y(f) = \alpha(1/2Q)^2 f^{-1} + \beta(1/2Q)^2 + \alpha(1/\nu_0^2)f + \beta(1/\nu_0^2)f^2 \quad (2.124)$$

および

$$S_\phi(f) = \alpha(\nu_0/2Q)^2 f^{-3} + \beta(\nu_0/2Q)^2 f^{-2} + \alpha f^{-1} + \beta \quad (2.125)$$

を得る。(2.124)と(2.125)式は表現形式が異なるだけで、全く同じ内容を持つ。

(2.124)式と付録3の式

$$S_y(f) = h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0 + h_1f + h_2f^2 \quad (A3.15)$$

と比較することにより、(2.124)式右辺の各項は第1項から順に、フリッカ周波数(FM)雑音、白色周波数(FM)雑音、フリッカ位相(PM)雑音および白色位相(PM)雑音であることが分る。そして、これらのスペクトル密度の項に対応する2標本標準偏差 $\sigma_y(\tau)$ は、付録3の表A3.1から、それぞれ、 τ^0 , $\tau^{-\frac{1}{2}}$, τ^{-1} および τ^{-1} に比例していることも分る。

帰還発振器内の残りの雑音源は前述(2)振動子とその付属回路による発振周波数 ν_0 の変動である。言うまでもなく、これらを収納する恒温槽の温度変化も ν_0 の変動に影響する。このようなパラメータの比較的ゆるやかな変動はフリッカ(1/f)雑音スペクトルを持つことが多いと言われ、これを示す測定結果もある。そこで、これに関するスペクトル密度を次式により、フリッカFM雑音として表す。

$$S_y(f) = \alpha_{\nu_0} \cdot f^{-1} \quad (2.126)$$

最後に、帰還発振器に続く、AGCおよび緩衝用の増幅器(図2.21)の(3')ショット雑音と(4')フリッカ雑音は、前述の雑音源(3)と(4)と全く同様に、それぞれ、白色位相雑音とフリッカ位相雑音となる。これらのスペクトル密度は(2.117)式と同様に次式で表せる。

$$S_\phi(f) = S_{\phi\phi'}(f) = \beta' + \alpha' f^{-1} \quad (2.127)$$

また、これを $S_y(f)$ で表すと次式となる。

$$S_y(f) = (f/\nu_0)^2 S_\phi(f) = (\alpha'/\nu_0)f + (\beta'/\nu_0)^2 f^2 \quad (2.128)$$

以上、図2.21の高安定水晶発振器総合のワースペクトル密度 $S_y(f)$ および $S_\phi(f)$ は、それぞれ、(2.124)、(2.126)、(2.128)式および(2.125)、(2.126)、(2.127)式から次の2式で表せる。

$$S_y(f) = h^{-1}f^{-1} + h_0 + h_1f + h_2f^2 \quad (2.129)$$

$$S_\phi(f) = \nu_0^2(h_{-1}f^{-3} + h_0f^{-2} + h_1f^{-1} + h_2) \quad (2.130)$$

ここで

$$h_{-1} = \alpha_{\nu_0} + \alpha(1/\nu_0^2), \quad h_0 = \beta(1/2Q)^2, \quad h_1 = (\alpha + \alpha')(1/\nu_0^2), \quad h_2 = (\beta + \beta')(1/\nu_0^2) \quad (2.131)$$

(2.129) 式の $S_y(f)$ に対応する $\sigma_y(\tau)$ は付録 3 表 A3.1 から次式となる。

$$\sigma_y(\tau) = 1.18h_{-1}^{\frac{1}{2}} + 0.71h_0^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi}[3.81 + 3\ln(2\pi f_h\tau)]^{\frac{1}{2}}h_1^{\frac{1}{2}}\tau^{-1} + 0.28f_h^{\frac{1}{2}}h_2^{\frac{1}{2}}\tau^{-1} \quad (2.132)$$

ここで、 f_h は付録 3 の (A3.14) 式で与えられるスペクトルの上限の周波数である。

(2.129) 式の $S_y(f)$ とこれに対応する (2.132) 式の $\sigma_y(\tau)$ のそれぞれの f と τ のべきだけに

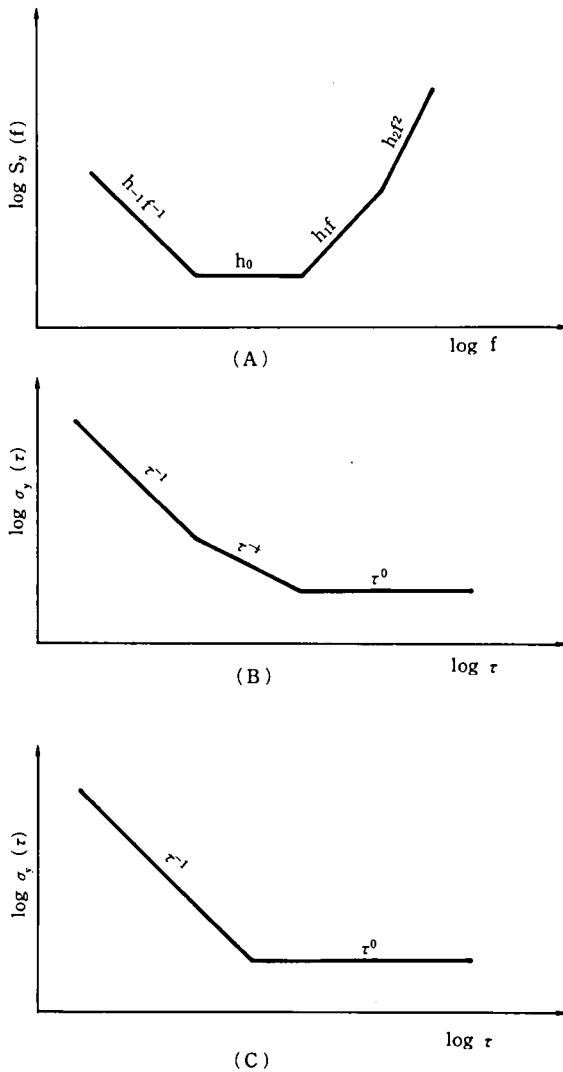


図 2.22

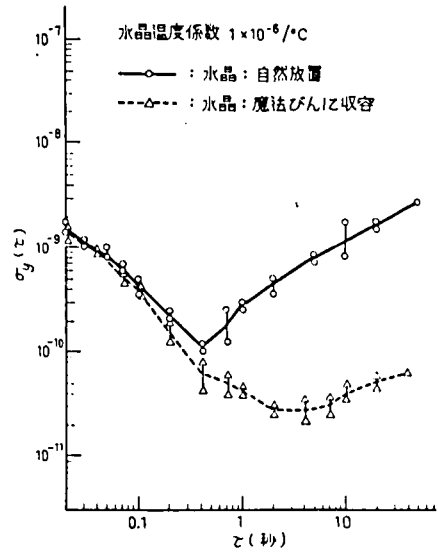


図 2.23 水晶発振器の周波数安定度と温度

注目した概略の形を図 2.22 (A) に示す。

高安定水晶発振器では、ふつう、 Q 値が数百万くらいの振動子を用いるので、(2.124) 式の $\beta(1/2Q)^2$ の項は他の項に比して非常に小さい。この項に対応する $\sigma_y(\tau)$ は、付録の表 A3.1 から、 $\sqrt{\beta/2}(1/2Q)\tau^{-\frac{1}{2}}$ となり、非常に小さくなる。第 2.2 節の (2.4) 式⁽²⁶⁾ は、高 Q の水晶振動子の等価抵抗の熱雑音による周波数安定度を示している。これは図 2.4 にも示されているように極めて小さい。上記の係数 β には、この熱雑音以外に、帰還発振器内の能動素子（真空管またはトランジスタ）のショット雑音の影響も含まれているが——(2.115) および (2.116) 式参照——、上記のような高安定水晶発振器の安定度 $\sigma_y(\tau)$ には $\tau^{-\frac{1}{2}}$ の項は極めて小さく、他の項に比べてほとんど無視できる。図 2.22 (C) はこれを示し、 τ^{-1} (白色位相雑音またはフリッカ位相雑音に対応) と τ^0 (フリッカ周波数雑音) の項しか無い。

第 2 章の周波数安定度の図では、図 2.4 の折線 3a (5MHz 発振器 No. 3, トランジスタ), 図 2.6 折線 1a (2.5 MHz 発振器, 真空管), 図 2.12 の OSC. 1~4 はほぼこの傾向を示している。 τ^0 の傾斜は主として振動子の周波数温度係数と恒温槽の性能でできる周囲温度変動によるものと思う。図 2.23 は、全く別の発振器の周波数安定度のデータであるが、温度の影響は明らかである⁽³³⁾。

以上の考察から、高 Q の振動子を用い、入念に設計された高安定水晶発振器の周波数安定度——経時変化が現れるような、たとえば数ヶ月以上の長期安定度は別として——について次のように結論できる。

- (1) 帰還発振ループ内の水晶振動子の熱雑音と能動素子のショット雑音は、帯域制限された白色周波数雑音として安定度の $\tau^{-\frac{1}{2}}$ の項に効くが、これは他の要因に比べて無視できる程度である。
- (2) 上記ループ内能動素子のフリッカ雑音は、フリッカ周波数雑音として τ^0 の項に効く。
- (3) 帰還発振ループに続く AGC や緩衝用の増幅器の雑音はフリッカ位相雑音および帯域制限された白色位相雑音として、安定度の τ^{-1} の項に大きな影響を与え、 τ が 0.01~1 秒くらいでは、とくに前者の影響が大きい。
- (4) 水晶振動子の周波数温度特性と恒温槽の性能は、温度効果として発振器安定度の τ^0 の項に重大な影響を持つ。

第3章 測定用機器

3.1 はじめに

この章では、第2章で述べた周波数および周波数安定度の精密測定にとくに必要な機器として、高周波同調増幅器、周波数通倍器、周波数混合器および周波数オフセット器について述べる。これらの機器は、上記の目的のための測定器のみにとどまらず、周波数標準および各種の応用システムの重要な構成要素でもある。

始めの高周波同調増幅器では、真空管増幅器とトランジスタ増幅器の位相雑音を論ずる。前者では、供給電源や周囲温度変化による位相変動および真空管雑音による位相並びに周波数変動につき述べる。また、後者では、フリッカ位相雑音に関する解析と実験を行い、この雑音低減のための条件を与えている。

次の周波数通倍器は、原子時計の研究に必要なマイクロ波信号の発生とこの時計と水晶時計との周波数精密比較に不可欠である。ここでは、プッシュ・プッシュ形ダブラ（両波整流器形ダブラ）の位相変動の解析、高位相安定度を目的とした多段通倍器の設計と試作、さらに、供給電源、入力信号電圧、周囲温度変化による通倍器出力信号の位相変動の測定とその結果につき述べる。

また、周波数混合器は、第2章のビート法による測定や周波数合成器などに用いられる。ここでは、ショットキーバリアダイオードを用いた市販の2重平衡混合器の位相雑音の測定および位相雑音と混合器の雑音指数との関係につき述べている。

最後に、オフセット器は、その入力信号と微小な周波数差を持つ信号を発生する特殊な周波数合成器である。初期の原子時計——アンモニア吸収形——で用いた、微小周波数差のFS変調の方法とPLL技術を組合せた独自の方法による、高安定度の周波数オフセット器の実験結果につき述べている。

3.2 高周波同調増幅器^{(34)–(37)}

高周波増幅器は、高安定度水晶発振器、原子周波数標準器、周波数合成器などの高安定度信号源において、また、これらを利用した種々の測定システムにおいて、段間の緩衝用、高利得増幅用、出力信号分配用などに使用される。何れの場合も、これらに高い位相安定度が要求される。位相安定度に影響を及ぼす要因に、(1) 供給電源電圧変化、(2) 周囲温度変化、(3) 真空管およびトランジスタの雑音などがある。本節では、始めに真空管増幅器における上記(1)、(2)お

よび(3)(ショット雑音)の影響について、次にトランジスタ増幅器における(3)(フリッカ雑音)の影響について述べる。

3.2.1 真空管増幅器^{(34),(35)}

(1) 陽極電源電圧変化による位相変化

図 3.1 のように、陽極負荷が単一同調回路の場合、格子入力信号電圧を E_g 、陽極出力信号電圧を E_o とすると、増幅器利得 G は

$$G = E_o / E_g = -g_m Z_e \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R_e} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{r_p} + \frac{1}{R} \quad (3.2)$$

ここで、 Z_e は真空管の内部抵抗 r_p をも含めた陽極負荷インピーダンス、 R は LC 同調回路だけの共振インピーダンスである。利得 G の位相角を ϕ とすれば

$$\begin{aligned} \phi = \arg G &= \pi - \arg \left[\frac{1}{R_e} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right] \\ &= \pi - \tan^{-1} v_e \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで、 v_e は同調回路の離調度で

$$v_e = Q_e \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (3.5)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.6)$$

また、 Q_e は同調回路の実効 Q で

$$Q_e = \omega_0 C R_e = R_e / \omega_0 L \quad (3.7)$$

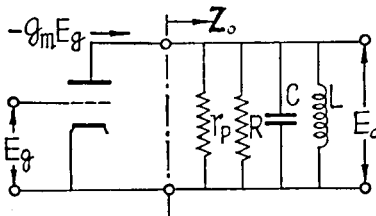


図 3.1 単一同調回路増幅器

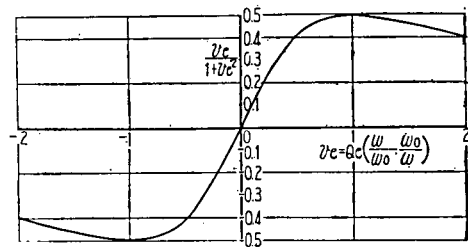


図 3.2 離調度 v_e と $v_e / (1 + v_e^2)$ の関係

陽極電源電圧 E_b だけが変化した場合の ϕ の変化は、 r_p の変化によるものとする。(3.4)式を E_b で微分し、(3.3)式を用いて

$$\frac{d\phi}{dE_b} = -\frac{v_e}{1+v_e^2} \frac{1}{1+\frac{r_p}{R}} \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_b}$$

または

$$\Delta\phi = -\frac{v_e}{1+v_e^2} \frac{1}{1+\frac{r_p}{R}} \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_b} \Delta E_b \quad (3.8)$$

(3.8)式の $v_e/(1+v_e^2)$ は図 3.2 から求められ、 $(1/r_p)(dr_p/dE_b)$ も実測できるので、 R/r_p 、 ΔE_b が分れば $\Delta\phi$ が分る。式から明らかに、離調度 $v_e=0$ のとき $\Delta\phi=0$ である。また、5 極管の場合、(3.8)式の $1/(1+r_p/R)$ の項は小さくなる。

なお、線条電源電圧 E_f の変化の影響も $\frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_f}$ が分れば (3.8) 式と同様の形で与えられる。

(2) 周囲温度変化による位相変化

周囲温度変化により同調回路の共振周波数が変化し、それにより信号の位相が変化するが、これを単一同調と複同調回路について考察する。

(i) 単一同調回路

図 3.1 の増幅器における位相角は (3.4) 式で与えられる。これを温度 θ で微分すると

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{Q_e}{1+v_e^2} \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_0}{d\theta} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{1}{Q_e} \frac{d\theta_e}{d\theta} \right\} \quad (3.9)$$

ここで、 v_e 、 ω_0 、 Q_e はそれぞれ (3.5)、(3.6) および (3.7) 式で与えられている。(3.7) 式における同調回路実効並列抵抗 R_e が温度に依存しないと仮定すると、 Q_e の温度係数は

$$\alpha_{Q_e} = \alpha_{\omega_0} + \alpha_L \quad (3.10)$$

ここで

$$\alpha_{Q_e} = \frac{1}{Q_e} \frac{dQ_e}{d\theta} \quad (3.11)$$

$$\alpha_{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_0}{d\theta} \quad (3.12)$$

$$\alpha_L = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\theta} \quad (3.13)$$

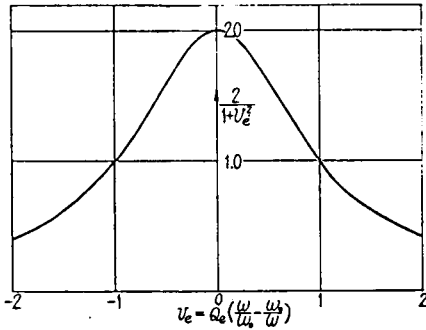


図 3.3 v_e と $\frac{2}{1+v_e^2}$ の関係

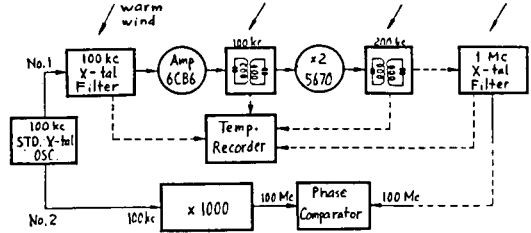


図 3.4 通倍器各部の温度変化による位相変化の測定

であり、それぞれ Q_e , ω_0 , L の温度係数を表す。(3.9)～(3.13) 式から

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2Q_e\alpha\omega_0}{1+v_e^2} \left\{ \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\alpha_L}{2\alpha\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right\} \quad (3.14)$$

一般には $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 0$ の状態で動作させるが、その場合は

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2Q_e\alpha\omega_0}{1+v_e^2} = \frac{2Q_e\alpha\omega_0}{1+Q_e^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

または

$$\Delta\phi = \frac{2Q_e\alpha\omega_0}{1+v_e^2} \Delta\theta \quad (3.15)$$

この式の $2/(1+v_e^2)$ は図 3.3 から求められるので、 Q_e , $\alpha\omega_0$, $\Delta\theta$ から位相変化 $\Delta\phi$ が分る。

(3.15) 式の $\Delta\theta$ および $\Delta\phi$ が τ 秒間に生じたとすれば、 τ 秒間の平均周波数変化は

$$\left. \begin{aligned} \Delta f &= \frac{\Delta\phi}{2\pi} \frac{1}{\tau} = \frac{Q_e\alpha\omega_0}{1+v_e^2} \frac{\Delta\theta}{\pi\tau} \\ \frac{\Delta f}{f} &= \frac{\Delta\phi}{2\pi f} \frac{1}{\tau} = \frac{Q_e\alpha\omega_0}{1+v_e^2} \frac{\Delta\theta}{\pi f\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

温度変化による位相変化および周波数変化を小さくするには、 $Q_e \cdot \alpha\omega_0$ を小さくすることが必要なことが (3.15) および (3.16) 式から分る。

次に、3.3 の周波数通倍器 (100 kHz～1.9 GHz) に使用されている 100 kHz および 1 MHz の水晶フィルタについての実験結果につき述べる。図 3.4 はその実験方法で、温風により生じた温度変化は熱電対温度計で、位相変化は 100 MHz まで通倍して測定した。結果を通倍器のその

表 3.1 通倍器各部の温度変化と位相変化
(第 2-4 図の実験による測定値)

		測 定 値		計算値*	備 考
		温度変化と 位相変化	温度変化 1°C 当りの位相変化	温度変化 1°C 当りの位相変化	
100 kc X-tal Filter		7°C 11,430°	1,633°	1,236°	* $Q=2 \times 10^4$ (実測値) 温度係 数 $-5.4 \times 10^{-7}/^{\circ}\text{C}$ (実測値) により (3.15) 式から 計算。
1 Mc X-tal Filter		9°C 1,414°	157°	—	
100 kc Amp. coil case	No. 1	0.95°C** 60°	63°	115°	* $Q=10$ 固有周波数の温度係数 $1 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ により (3.26) 式から 計算。 **微小温度変化測定器によ る。
	No. 2	8.8°C 216°	24.5°		
200 kc Doubl coil case	No. 1	8.4°C 60°	7.2° 28.8°	—	
	No. 2	7°C 202°	28.8°		

他の部分と共に表 3.1 に示す。100 kHz 水晶フィルタの測定値と (3.15) 式による計算値—— $Q_e=2 \times 10^4$ (実測値), $\alpha_{\omega_0}=-5.4 \times 10^{-7}/^{\circ}\text{C}$ (実測値), $v_e=0$ とした——とは大体合っている。また, 温度の時間的変化率 $\Delta\theta/\tau=0.001^{\circ}\text{C}/\text{s}$ ——コイルケースなど密閉小容器の場合の現実的な値——のときの等価的な周波数変化率は, (3.16) 式から 3.4×10^{-11} と計算される。種々の $\Delta\theta/\tau$ に対する $\Delta f/f$ を図 3.5 の破線で示す。また, 表 3.1 における $\Delta\phi$ の測定値 1,633° を用いた (3.16) 式による $\Delta f/f$ も同図の実線で示してある。1 MHz 水晶フィルタについても同様である。

(ii) 複同調回路

図 3.6 のように陽極負荷に複同調回路がある場合の増幅器の電圧利得 G は次式で与えられる⁽³⁸⁾。

$$G = \frac{E_0}{E_g} = \frac{-jg_m s \sqrt{R_1 R_2}}{1 + s^2 - v_e^2 + jv_e \sqrt{b} + 2} \quad (3.17)$$

ここで

$$v_e = \sqrt{Q_1 Q_2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (3.18)$$

$$Q_1 = \omega_0 C_1 R_1, \quad Q_2 = \omega_0 C_2 R_2 \quad (3.19)$$

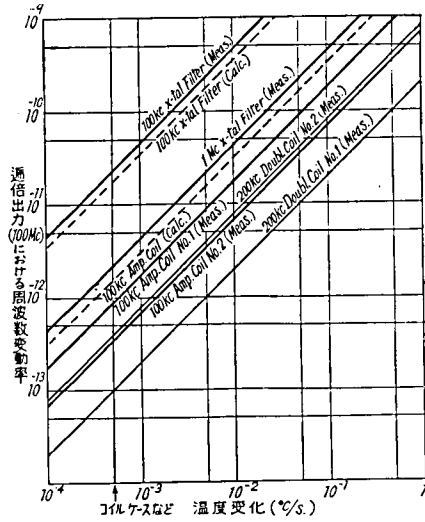


図 3.5 通倍器各部の温度変化による通信出力 (100 Mc) の周波数変動 (第 3.1 表の測定値または計算値による)

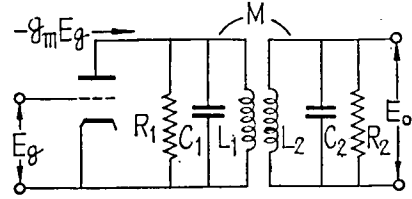


図 3.6 複同調回路増幅器

$$s = k\sqrt{Q_1 Q_2}, \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (3.20)$$

$$b = \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_1}{Q_2} \quad (3.21)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} = \frac{1}{\sqrt{C_2 L_2}} \quad (3.22)$$

(3.19) 式の R_1 には真空管の陽極内部抵抗も含まれている。 G の位相角は

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{v_e \sqrt{b+2}}{1+s^2-v_e^2} \quad (3.23)$$

この式を温度 θ で微分し、1 次および 2 次回路が同一の α_{ω_0} を有し、また、 $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 0$ と仮定すると

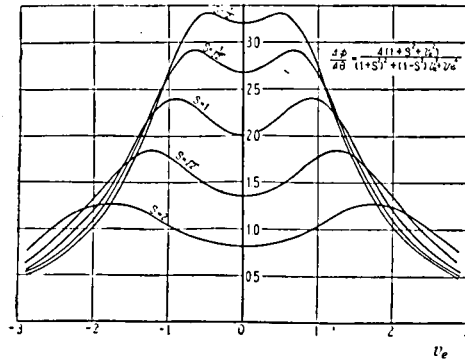
$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2\sqrt{b+2} \sqrt{Q_1 Q_2} \alpha_{\omega_0} (1+s^2+v_e^2)}{(1+s^2-v_e^2)^2 + (b+2)v_e^2} \quad (3.24)$$

$b=2$, すなわち $Q_1=Q_2=Q_e$ の場合、上式から

$$\Delta\phi = \frac{4(1+s^2+v_e^2) Q_e \alpha_{\omega_0}}{v_e^4 + (1-s^2)v_e^2 + (1+s^2)^2} \Delta\theta \quad (3.25)$$

とくに $s=kQ_e=1$ (臨界結合) の場合

図 3.7 離調度 v_e と $\frac{4(1+s^2+v_e^2)}{(1+s^2)^2+(1-s^2)v_e^2+v_e^4}$ との関係



$$\Delta\phi = \frac{4(v_e+2)Q_e\alpha_{\omega_0}}{v_e^4+4} \cdot \Delta\theta \quad (3.26)$$

図 3.7 は種々の $s=kQ_e$, v_e に対する

$$\frac{4(1+s^2+v_e^2)}{v_e^4+(1-s^2)v_e^2+(1+s^2)^2}$$

の値を示す。

計算例として、前述の通倍器中の 100 kHz 複同調増幅器を考える。実測値ではないが、回路の設計値として、 $v_e=0$, $s=1$, $Q_1=Q_2=Q_e=10$, $|\alpha_{\omega_0}|=1\times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ を採り、(3.26) 式を用いると、100 kHz では次のようになる。

$$\Delta\phi=0.002 \text{ rad}/^{\circ}\text{C}=0.115^{\circ}/^{\circ}\text{C} \quad (3.27)$$

これを表 3.1 の測定値と比較すると、No. 1 増幅器の $0.063^{\circ}/^{\circ}\text{C}$, No. 2 の $0.0245^{\circ}/^{\circ}\text{C}$ の何れとも可成り違う。その要因として、同調回路の温度係数 α_{ω_0} の推定誤差が最も大きく、 s , Q_e はこれに次ぎ、温度測定誤差は最も小さいと思う。また、(i) の単同調の場合と同様、温度の時間的変化 $\Delta\theta/\tau=0.001^{\circ}\text{C}/\text{s}$ とし、 $f=100 \text{ kHz}$, (3.27) 式の $\Delta\phi$ を使えば、(3.16) 式より

$$\Delta f/f=3.2\times 10^{-12} \quad (\text{計算値}) \quad (3.28)$$

となる。種々の $\Delta\theta/\tau$ に対する $\Delta f/f$ を図 3.4 に “100 kc Amp coil (calc.)” で示してある。また、2つの複同調増幅器の $\Delta\phi$ の実測値から (3.16) 式を用いて計算した結果を図 3.5 の “100 kc Amp coil No. 1 (Meas.)” および “100 kc Amp coil No. 2 (Meas.)” で示す。200 kHz ダブラについても同様である。同図からとくに 100 kHz 水晶フィルタの $\Delta f/f$ が大きいことが分る。これは $Q_e\alpha_{\omega_0}$ が大きいためである。高 Q の水晶フィルタは通倍数の大きい通倍器で良質の（スペクトル純度の高い）通倍出力を得るために有効である。したがって、これを使用する場合、温度変化の影響を少なくするため、適当な恒温槽を使う必要がある。

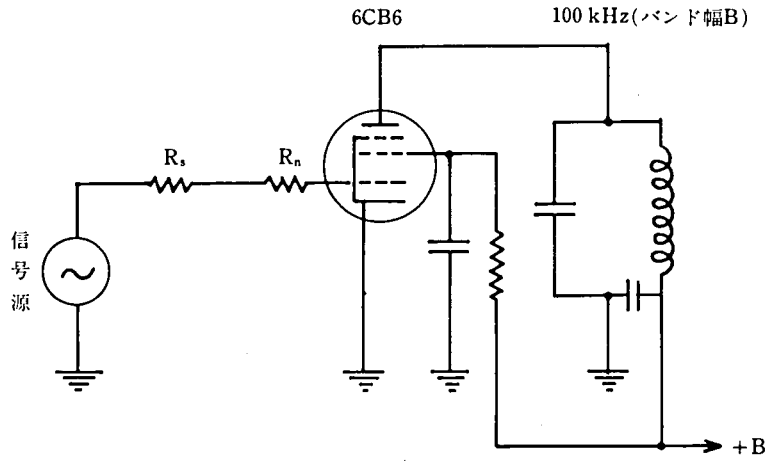


図 3.8 100 kHz 帯域増幅器と雑音源 (R_s, R_n)

(3) 白色雑音による位相変動

図 3.8 に示す 100 kHz 帯域増幅器の入力信号源の熱雑音および真空管 (6CB6) のショット雑音による位相変動とこれによる平均周波数変動を考える。

いま、増幅器入力高周波信号を $E \cos 2\pi f_0 t$ とし、これに、 f_0 を中心に帯域幅 $B (B \ll f_0)$ で帯域制限された白色雑音が重畳しているとすると、合成波は次式のように表される⁽³⁹⁾。

$$c(t) = E \cos 2\pi f_0 t + e_n(t) \quad (3.29)$$

ここで

$$e_n(t) = a_n \cos 2\pi f_0 t + b_n \sin 2\pi f_0 t \quad (3.30)$$

また、 a_n, b_n は相互に独立な正規分布をなし

$$\bar{a}_n = \bar{b}_n = 0 \quad (\text{直流成分は } 0) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a_n}^2 &\equiv \overline{a_n^2}, \quad \sigma_{b_n}^2 \equiv \overline{b_n^2} \\ \sigma_{a_n} &= \sigma_{b_n} = \sigma_{e_n} \equiv \sigma_n \end{aligned} \quad (3.32)$$

(3.29) と (3.30) 式から

$$\begin{aligned} c(t) &= (E + a_n) \cos 2\pi f_0 t + b_n \sin 2\pi f_0 t \\ &= \sqrt{(E + a_n)^2 + b_n^2} \cos(2\pi f_0 t - \phi) \end{aligned} \quad (3.33)$$

ここで

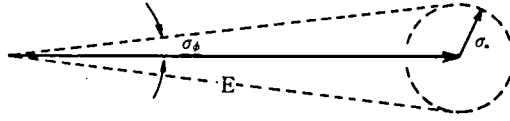


図 3.9 信号対雑音比と位相変動

$$\phi = \tan^{-1} \frac{b_n}{E + a_n} \approx \frac{b_n}{E} \quad (3.34)$$

上式で $E \gg a_n, b_n$ と仮定した。

(3.34) 式の標準偏差 (rms 値) は

$$\sigma_\phi = \sigma_{b_n}/E = \sigma_n/E \quad (3.35)$$

位相変動は入力段で考えた信号対雑音比でまることがわかる (図 3.9)。雑音源は入力信号源抵抗 R_s (同軸ケーブル 7C2V の特性インピーダンス 75Ω) の熱雑音と、等価雑音抵抗 R_n で表した 5 極管 (6CB6) のショット雑音および分配雑音である。

$$\sigma_n^2 = 4kT_0(R_s + R_n)B \quad (3.36)$$

ここで

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}, \quad T_0 = 290 \text{ K}$$

(3.35) と (3.36) 式から

$$\sigma_\phi = [4kT_0(R_s + R_n)B]^{\frac{1}{2}}/E \quad (3.37)$$

ここで

$$R_n \approx \frac{I_p}{I_p + I_{sg}} \left(\frac{2.5}{g_m} + \frac{20I_{sg}}{g_m^2} \right) \Omega^{(40)} \quad (3.38)$$

図 3.8 の場合, $I_p = 9 \text{ mA}$, $I_{sg} = 1 \text{ mA}$, $g_m = 5 \text{ mS}$ とすれば, $R_n \approx 1.2 \text{ k}\Omega$ となる。また, $R_s = 75 \Omega$, $B = 10 \text{ kHz}$, $E = 1.5 \text{ V}$ (尖頭値) から

$$\sigma_\phi \approx 3.01 \times 10^{-7} \text{ rad} \quad (3.39)$$

このような位相変動のある信号 $E \cos 2\pi f_0 t$ の τ 秒間の平均周波数変動率 $\sigma f_0/f_0$ は

$$\sigma f_0/f_0 \approx \sqrt{2} \sigma_\phi / 2\pi f_0 \tau \quad (3.40)$$

である。この式に, (3.39) 式と $f_0 = 100 \text{ kHz}$ を代入すると

$$\sigma f_0/f_0 \approx 6.78 \times 10^{-13} / \tau \quad (3.41)$$

したがって, 100 kHz 帯域増幅器出力の周波数変動率は平均化時間 (測定時間) 1 秒および 10

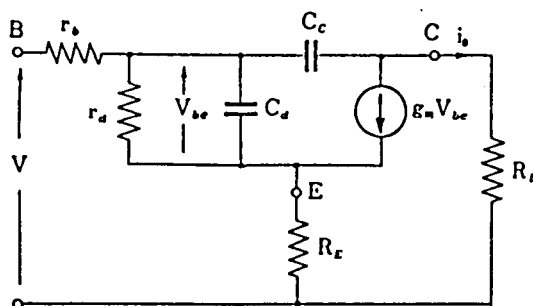
秒でそれぞれ 6.8×10^{-13} および 6.8×10^{-14} となる。これらの値から、図 3.8 の 100 kHz 増幅器は、3.3 節の 100 kHz \rightarrow 1.9GHz の周波数通倍器の初段増幅器として、ショット雑音に関する限り、十分な低雑音特性を持っている。

真空管雑音にはこのほかフリッカ雑音——雑音電力が周波数に逆比例する——があり、平均化時間が 1 秒や 10 秒あるいはそれ以上の場合、 $\sigma f_0/f_0$ に重要な影響を及ぼす。この雑音は酸化物被膜陰極からの熱電子放出機構その他に関連するが、高い相互コンダクタンスの真空管や“低雑音”形の真空管が低いフリッカ雑音を持つと言われている。雑音電力の周波数スペクトル ($1/f$ 特性) が数値的に明らかになれば、2.5 節で述べた方法により $\sigma f_0/f_0$ が分るが、これは今後の課題である。

3.2.2 トランジスタ増幅器のフリッカ位相雑音^{(36),(37)}

増幅器のフリッカ位相雑音 (パワースペクトル密度がフーリエ周波数 f に逆比例するような位相のゆらぎ) は、信号源の長期位相安定度または長期周波数安定度に大きな影響を及ぼす。従来、トランジスタを用いた増幅器や周波数通倍器の低いフーリエ周波数領域での位相雑音はすべて $1/f$ 形のパワースペクトルを有しており、この雑音がエミッタ抵抗による負帰還をかけることにより、30 dB も減少できると言う実験的事実があった⁽⁴¹⁾。しかし、この事実を十分に解明した回路解析は未だ無かった⁽⁴²⁾。

本節では、トランジスタの等価回路において、エミッタ電流 I_E に依存するパラメータだけではなく、ベース、コレクタ間の印加電圧に依存するベース、コレクタ間障壁容量 C_c にも着目し、



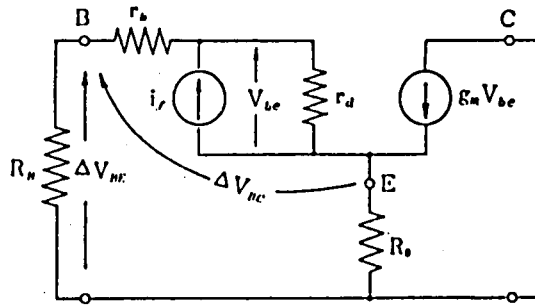
$$g_m = 1/r_e = I_E/26 \quad I_E: \text{mAで表示したエミッタ電流}$$

$$r_d = (1+h) r_e \quad h: \text{直流電流増幅率}$$

$$C_d = (\omega_T r_e)^{-1} \quad \omega_T: \text{利得帯域幅積}$$

$$R_E: \text{帰還抵抗}, \quad R_L: \text{負荷抵抗}$$

図 3.10 トランジスタ増幅器等価回路



R_B : ベースバイアス抵抗

R_E : エミッタバイアス抵抗

図 3.11 フリッカ雑音の所在を示す等価回路

トランジスタ固有の低周波雑音($1/f$ 形のパワースペクトルを持つ)により I_E および C_c が変調される結果, I_E および C_c の関数である実効的なトランスコンダクタンス G_m の位相にゆらぎを生じ, フリッカ位相雑音が発生するとして解析を行う。そして, その結果を実験と比較する。

(1) フリッカ位相雑音の解析^{(36),(37)}

図 3.10 はトランジスタ増幅器の小信号等価回路である。図において

I_E : mA で表したエミッタ電流

$g_m = 1/r_e = I_E/26$, r_b : ベース広がり抵抗, r_e : エミッタ抵抗

$r_d = (1+h)r_e$, h : 直流電流増幅率,

R_E : エミッタ帰還抵抗, R_L : 負荷抵抗,

$C_d = (\omega_T r_e)^{-1}$, ω_T : 利得帯域幅積,

V_{be} : ベース・エミッタ間電圧, i_o : 出力電流, V : 入力電圧

である。実効コンダクタンス G_m は

$$G_m = \frac{i_o}{V} = \frac{g_m}{1 + g_m R_E + r_d^{-1}(r_b + R_E) + j\omega[C_c R_L\{1 + (r_b + R_E)(g_m + r_d^{-1})\} + C_d(r_b + R_E)]} \quad (3.42)$$

G_m の位相角 ϕ は次式で表される。

$$\phi = \tan^{-1} \omega \frac{C_c R_L\{r_d + (r_b + R_E)(1 + g_m r_d)\} + C_d r_d(r_b + R_E)}{r_b + R_E + r_d(1 + g_m R_E)} \quad (3.43)$$

トランジスタに固有の $1/f$ 雑音により, I_E と C_c がそれぞれ ΔI_E と ΔC_c だけ変化すると, ϕ の変化 $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial I_E} \Delta I_E + \frac{\partial\phi}{\partial C_c} \Delta C_c \quad (3.44)$$

次に，トランジスタの $1/f$ 雑音源を含めた等価回路を図 3.11 に示す。図では，実験に用いた高周波同調増幅器を想定し，入力結合コンデンサとエミッタバイアス抵抗 R_0 のバイパスコンデンサのインピーダンスは注目している低周波数帯では無限大であり，また，出力同調回路のインピーダンスも 0 と仮定した。同図から，雑音源 i_f により，ベース，エミッタ間およびベース，コレクタ間に発生する雑音電圧 ΔV_{BE} および ΔV_{BC} は次式で表される。

$$\Delta V_{BE} = \frac{(R_B + R_0 + r_b)r_e}{R_B + r_d + r_b + hR_0} \cdot hi_f \quad (3.45)$$

$$\Delta V_{BC} = \frac{R_B(r_e + R_0)}{R_B + r_d + r_b + hR_0} \cdot hi_f \quad (3.46)$$

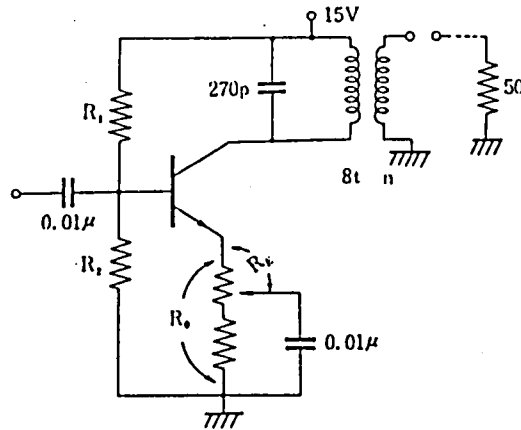
また， V_{BE} をベース，エミッタ間電圧， I_o を逆方向飽和電流とすれば

$$I_E = I_o \{ \exp(V_{BE}/26) - 1 \} \quad (3.47)$$

(3.45) と (3.47) 式から，エミッタ電流 I_E の変動分 ΔI_E は次式で与えられる。

$$\Delta I_E = \frac{R_B + R_0 + r_b}{R_B + r_b + r_d + hR_0} \cdot hi_f \quad (3.48)$$

さらに， C_c とコレクタ，ベース間電圧 V_{CB} との関係



2SA240) の β_f $\left(R_1=50K, R_2=25K \right.$
 2SC272) $\left. R_3=1.1K, n=1t \right)$

2SC32の β_f $\left(R_1=50K, R_2=30K \right.$
 $\left. R_3=0.8K, n=2t \right)$

図 3.12 5 MHz 同調増幅器

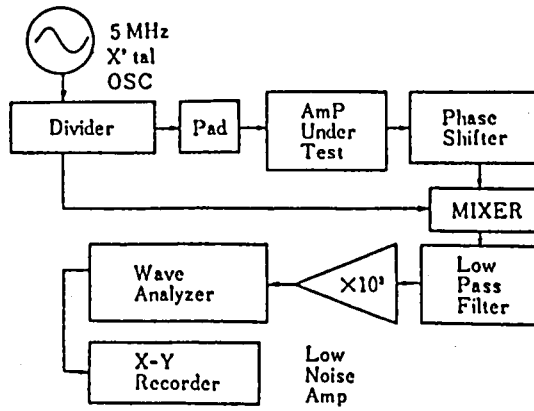


図 3.13 位相雑音測定系

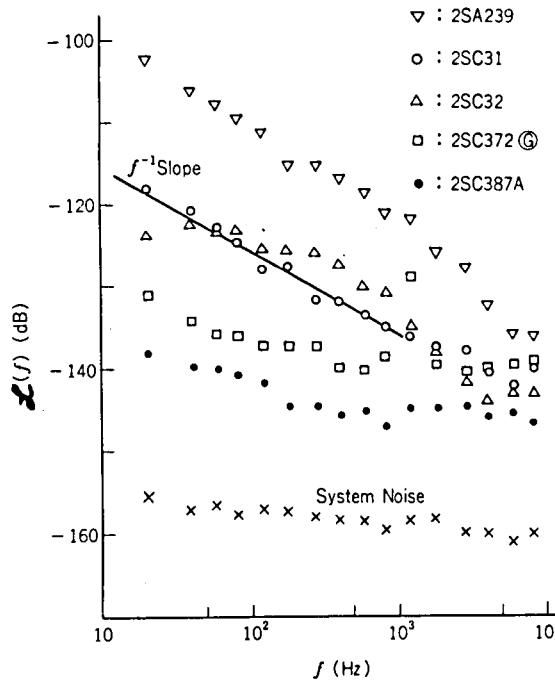


図 3.14 負帰還をかけないときの各トランジスタ増幅器の位相雑音, 入力信号レベル -29.3 dBm (into 50Ω)

$$C_c = C_0 V_{CB}^n \quad \left(n = -\frac{1}{2} \sim -\frac{1}{3}, C_0 \text{ は定数} \right)$$

と(3.46)式から, C_c の変動分 ΔC_c は

$$\Delta C_c = -\frac{n C_c}{V_{CB}} \cdot \frac{R_B(r_e + R_o)}{R_B + r_b + r_d + h R_o} \cdot h i_f \quad (3.49)$$

表 3.2 供試トランジスタの動作条件, 電気的特性, および $\mathcal{L}(20)$

試料	2SC31 Si NPN エビタキシャル プレーナ形	2SC32 Si NPN エビタキシャル プレーナ形	2SC372 ㊄ Si NPN エビタキシャル プレーナ形	2SC387 ㊄ Si NPN エビタキシャル プレーナ形	2SA239 Ge NPN エビタキシャル プレーナ形
I_E (mA)	3.0	3.0	3.0	3.0	3.2
V_{CE} (V)	11.7	11.7	11.7	11.7	11.3
V_{CB} (V)	11	11	11	11	11
h	30	43	224	64.5	15
f_r (MHz)	160	200	235	1200	200
r_b (Ω)	35	40	30	18	30
C_c (pF)	4	4	2	1	1
n	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
R_B (K Ω)	16.9	16.4	16.6	16.9	16.5
R_L (K Ω)	0.8	0.8	3.2	3.2	3.2
R_0 (K Ω)	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1
λ	0.29	0.29	0.58	0.29	0.31
$\mathcal{L}(20)$ (dB)	-118.8	-123.5	-131	-138	-102.5
$S_{i_f}^{1/2}$ (20)	2.1×10^{-8} A/ $\sqrt{\text{Hz}}$	1.83×10^{-8} A/ $\sqrt{\text{Hz}}$	2.1×10^{-8} A/ $\sqrt{\text{Hz}}$	1.2×10^{-8} A/ $\sqrt{\text{Hz}}$	1.4×10^{-7} A/ $\sqrt{\text{Hz}}$
$\mathcal{L}_{cal}(20)$ (dB)	-124	-126.9	-136.7	-138.2	-106.9

(3.44) 式の $\frac{\partial \phi}{\partial I_E}$ および $\frac{\partial \phi}{\partial C_c}$ を (3.43) 式から計算し, これらと (3.48) および (3.49) 式を (3.44) 式に代入すると, 位相の変化分 $\Delta \phi$ は, トランジスタの $1/f$ 等価雑音源 i_f , r_b , h などトランジスタのパラメータ, さらに, R_E , R_L など回路定数や I_E , V_{CB} などの動作条件の関数として計算できる。したがって, 増幅器の $1/f$ 雑音のパワースペクトル $S_{\Delta \phi}$ は, 雑音源 i_f のパワースペクトル S_{i_f} の測定値から求められる。

(2) 実験とその結果^{(36),(37)}

位相雑音の測定対象の 5 MHz 同調増幅器の回路図を図 3.12 に, 位相雑音の測定方法を図 3.13 に示す。これは図 2.10 に示したものと原理は同じである。また, 測定対象増幅器で使用したトランジスタの定数, 雑音電流スペクトル $S_{i_f}^{1/2}(20 \text{ Hz})$ の測定値, 回路定数, 動作条件などを表 3.2 に示す。

図 3.14 は帰還をかけないとき ($R_E=0$ のとき) の各トランジスタ増幅器の位相雑音の測定結果である。横軸はフーリエ周波数, 縦軸はスクリプト $\mathcal{L}(f)$ (付録 3 参照) である。各トランジスタの場合の $\mathcal{L}(f)$ の値は表 3.2 に示した $S_{i_f}^{1/2}(20 \text{ Hz})$ の実測値と良く対応している。また, \mathcal{L}

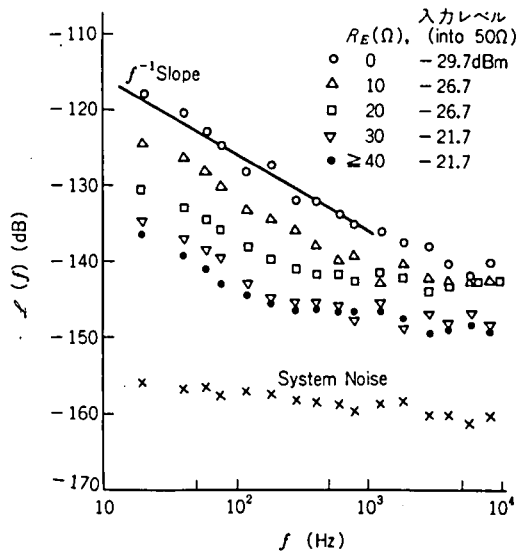


図 3.15 f^{-1} PM 雑音の負帰還による改善，使用トランジスタ，2SC31

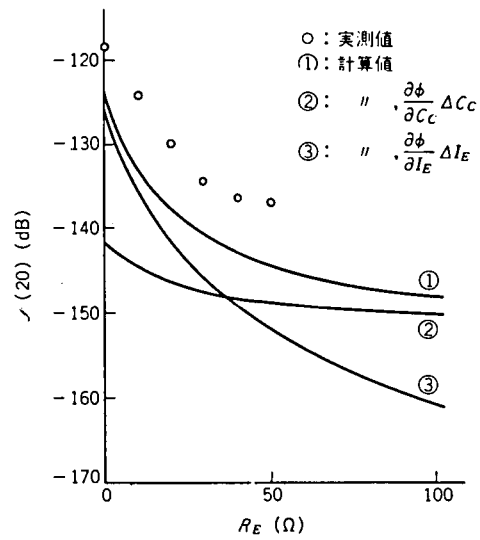


図 3.16 2SC31 f^{-1} PM 雑音 R_E 依存性

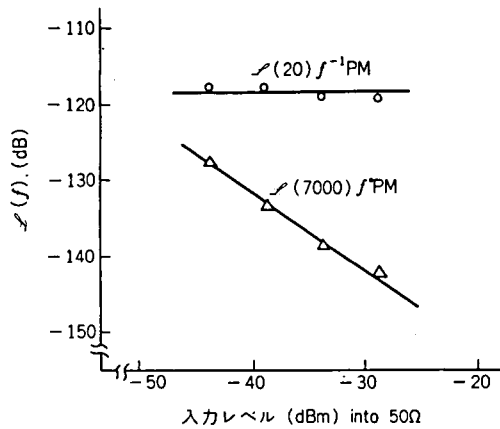


図 3.17 2SC31 ($I_E=3$ mA, $V_{CB}=11$ V, $R_E=0$) PM 雑音の入力レベル依存性

(f)は f の低い領域では，ほぼ $1/f$ の特性を示している。

次に，トランジスタに 2SC31 を用い，負帰還をかけたときの $1/f$ 位相雑音の改善の有様を図 3.15 に示す。 $f \leq 100$ Hz では，帰還抵抗 $R_E=40 \Omega$ で約 18 dB 改善されているが，それ以上抵抗値を大きくしても改善が無い。これに関連し，図 3.16 は，同じトランジスタによる増幅器の $1/f$ 雑音の R_E 依存性を (3.43) 式を用い， $f=20$ Hz で計算した結果で，図 3.15 の実測値と対応させてある。①は (3.44) 式による計算値を，②および③はそれぞれ同式の $\frac{\partial \phi}{\partial C_c} \cdot \Delta C_c$ および

$\frac{\partial \phi}{\partial I_E} \cdot \Delta I_E$ の単独の寄与を示している。 R_E を大きくしても $1/f$ 位相雑音の改善に限界があるのは、③の部分で R_E の増加と共に限り無く減少するのに対し、②部分が一定値に近づくためであり、図 3.15 の実験結果を良く説明している。

最後に、図 3.17 は 2SC31 を用いた増幅器の $1/f$ 位相雑音と白色位相雑音の入力信号レベル依存性を示している。 $1/f$ および白色位相雑音として $\mathcal{N}(20 \text{ Hz})$ および $\mathcal{N}(7000 \text{ Hz})$ を選んだ。図から明らかなように、白色位相雑音は入力信号電力レベルに逆比例しているのに対し、 $1/f$ 位相雑音は入力信号レベルを 15 dB 変化させても一定である。このことは、(3.43) 式が入力信号レベルに依存しない関数であること、換言すれば、増幅器の低周波位相雑音がトランジスタ固有の低周波雑音によるパラメータ変調の結果生じていることを示している。

3.2.3 結論

(1) 真空管増幅器

(i) 陽極電源電圧変動による出力信号の位相変動の解析を行い、位相変動と同調回路の離調度、陽極内部抵抗、陽極負荷抵抗、陽極電圧変動との関係式を求めた。

(ii) 周囲温度変動による出力信号の位相変動を単一同調と複同調増幅器について行い、それぞれの場合について位相変動と同調回路の実効 Q 、共振周波数の温度係数、離調度などとの関係式を導き、これらを実験と比較し、一部を除き良く一致した。

(iii) 帯域制限された白色雑音（熱雑音とショット雑音）による位相変動およびこれによる平均周波数の変動を与える式を導き、周波数通倍器（100 kHz \rightarrow 1.9 GHz）の初段の 100 kHz 同調増幅器における位相変動および平均周波数変動を推定した。その結果、この増幅器は通倍器の要素として十分低雑音特性を満足していることが分った。フリッカ雑音の影響については論じていない。

(2) トランジスタ増幅器

トランジスタ固有の低周波雑音により、エミッタ電流 I_E 、ベース、コレクタ間障壁容量 C_c が変調される結果、 I_E 、 C_c の関数である実効的なトランスコンダクタンス G_m の位相にゆらぎを生じ、 $1/f$ 位相雑音が発生するとして解析を行い、実験と比較し大体良い一致をみた。

(i) I_E 、 C_c のゆらぎ量について考察の結果、トランジスタ固有の低周波雑音と電気的特性から、 $1/f$ 位相雑音が計算できる。

(ii) C_c のゆらぎの考察から、負帰還による $1/f$ 位相雑音の改善には限度があることが分る。

(iii) 低周波雑音によるパラメータ変調であることから、 $1/f$ 位相雑音は入力信号レベルに依存しない。

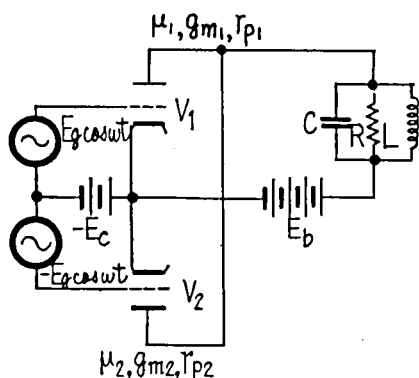


図 3.18 Push—Push 型通倍器(偶数次高調波用)

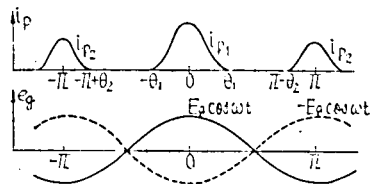


図 3.19 図 3.18 の通倍器の陽極電流と信号入力電圧波形

(iv) $1/f$ 位相雑音の小さい増幅器を得るには、固有の低周波雑音が小さく、直流電流増幅率 h が大で、 C_c の小さいトランジスタを使用するべきである。

3.3 周波数通倍器^{(34),(35)}

3.3.1 位相変動の解析

周波数通倍器の解析については多数の報告があるが、その位相変動に関する報告は少ない。ここでは、偶数次の通倍に有効なプッシュ・プッシュ形 (push-push type) 通倍器の位相変動の解析を行う。

(1) プッシュ・プッシュ形通倍器

図 3.18 の回路で入力信号電圧と格子偏倚電圧は平衡しているが、2 本の真空管定数は必ずしも等しくないと仮定する(ただし、真空管特性は折線特性と仮定する)。また、陽極負荷は希望の高調波(偶数次高調波)にのみ同調しているものとする。図 3.19 の陽極電流の流通角 θ_1 と θ_2 は一般には等しくないが、 $2\theta_1, 2\theta_2$ ともに π を超えることはないと仮定する。記号を次のように定めると、図 3.19 から (3.50) 式が得られる。

$\mu_1, g_{m1}, r_{p1}; \mu_2, g_{m2}, r_{p2}$: 真空管 V_1, V_2 の 3 定数

$-E_c$: 格子偏倚電圧

E_g : 格子陰極間基本波電圧尖頭値

E_b : 陽極電源電圧

R : 陽極負荷抵抗

i_{p1}, i_{p2} : V_1, V_2 の陽極電流瞬時値

θ_1, θ_2 : i_{p1}, i_{p2} の流通角

i_p : 負荷電流瞬時値

I_n : i_p の第 n 高調波成分尖頭値

$0 < \omega t < \theta_1$ に対して

$$\left. \begin{aligned} i_p = i_{p1} &= g_{m1} \left(-E_c + E_g \cos \omega t + \frac{E_b - RI_n \cos n\omega t}{\mu_1} \right) \\ &= g_{m1} \left(-E_c + \frac{E_b}{\mu_1} + E_g \cos n\omega t - \frac{RI_n \cos n\omega t}{\mu_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

$\pi - \theta_2 < \omega t < \pi$ に対して

$$i_p = i_{p2} = g_{m2} \left(-E_c + \frac{E_b}{\mu_2} - E_g \cos \omega t - \frac{RI_n \cos n\omega t}{\mu_2} \right)$$

i_p を $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数に展開すると

$$\left. \begin{aligned} i_p &= I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + \dots \\ &\quad \dots + I_n \cos n\omega t + \dots \\ I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi i_p d(\omega t) \\ I_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi i_p \cos n\omega t d(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

真空管 V_1 の流通角は, (3.50) 式の第 1 式で $\omega t = \theta_1, i_{p1} = 0$ とおき, 次式で与えられる。

$$E_c - \frac{E_b}{\mu_1} = E_g \cos \theta_1 - \frac{RI_n \cos n\omega t}{\mu_1} \quad (3.52)$$

V_2 についても同様に

$$E_c - \frac{E_b}{\mu_2} = E_g \cos \theta_2 + (-1)^{n+1} \frac{RI_n \cos n\omega t}{\mu_2} \quad (3.53)$$

(3.50)~(3.53) 式から, 希望高調波 (偶数次高調波) 成分 I_n が求まる。

$$I_n = \frac{g_{m1} \Theta_{n1}^{(1)} - g_{m2} \Theta_{n1}^{(2)}}{\pi + R \left(\frac{\Theta_{nn}^{(1)}}{r_{p1}} + \frac{\Theta_{nn}^{(2)}}{r_{p2}} \right)} E_g \quad (3.54)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
\Theta_{n1}^{(1)} &= 2 \int_0^{\theta_1} (\cos \omega t - \cos \theta_1) \cos n \omega t \, d(\omega t) \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sin(n-1)\theta_1}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta_1}{n+1} \right\} \quad (n \neq 1) \\
\Theta_{n1}^{(2)} &= 2 \int_{\pi-\theta_2}^{\pi} (\cos \omega t + \cos \theta_2) \cos n \omega t \, d(\omega t) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left\{ \frac{\sin(n-1)\theta_2}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta_2}{n+1} \right\} \quad (n \neq 1)
\end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

$$\left. \begin{aligned}
\Theta_{nn}^{(1)} &= 2 \int_0^{\theta_1} (\cos \omega t - \cos n \theta_1) \cos n \omega t \, d(\omega t) \\
&= \theta_1 - \frac{\sin 2n\theta_1}{2n} \quad (n \neq 0) \\
\Theta_{nn}^{(2)} &= 2 \int_{\pi-\theta_2}^{\pi} (\cos \omega t + (-1)^{n+1} \cos n \theta_2) \cos n \omega t \, d(\omega t) \\
&= \theta_2 - \frac{\sin 2n\theta_2}{2n} \quad (n \neq 0)
\end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

また、直流成分は

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \left\{ (g_{m1} \Theta_{01}^{(1)} - g_{m2} \Theta_{01}^{(2)}) E_g - \left(\frac{\Theta_{0n}^{(1)}}{r_{p1}} + \frac{\Theta_{0n}^{(2)}}{r_{p2}} \right) R I_n \right\} \quad (3.57)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
\Theta_{01}^{(1)} &= \sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1 \\
\Theta_{01}^{(2)} &= -(\sin \theta_2 - \theta_2 \cos \theta_2) \\
\Theta_{0n}^{(1)} &= \frac{\sin n\theta_1}{n} - \theta_1 \cos n\theta_1 \\
\Theta_{0n}^{(2)} &= (-1)^n \left(\frac{\sin n\theta_2}{n} - \theta_2 \cos n\theta_2 \right)
\end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

なお、不要波成分 $I_m (m \neq 0, n)$ は

$$I_m = \frac{1}{\pi} \left\{ (g_{m1} \Theta_{m1}^{(1)} - g_{m2} \Theta_{m1}^{(2)}) E_g - \left(\frac{\Theta_{mn}^{(1)}}{r_{p1}} + \frac{\Theta_{mn}^{(2)}}{r_{p2}} \right) R I_n \right\} \quad (3.59)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
\Theta_{mn}^{(1)} &= \frac{n}{m} \left\{ \frac{\sin(m-n)\theta_1}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\theta_1}{m+n} \right\} \\
\Theta_{mn}^{(2)} &= (-1)^{m-n} \frac{n}{m} \left\{ \frac{\sin(m-n)\theta_2}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\theta_2}{m+n} \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

以上のように、(3.54)~(3.60) 式により、希望高調波成分 $I_n (n: \text{偶数})$ 、直流成分 I_0 および不

要高調波成分 $I_m (m \neq 0, n)$ を計算できる。

いま, V_1, V_2 の特性が完全に等しい場合を考える。すなわち

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, g_{m1} = g_{m2} = g_m, r_{p1} = r_{p2} = r_p \quad (3.61)$$

したがって, (3.52) および (3.53) 式から, n が偶数の場合

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (3.62)$$

(3.55), (3.56), (3.58), (3.59) および (3.60) 式から n が偶数のとき, 任意の m に対し

$$\Theta_{mn}^{(2)} = (-1)^{m-n} \Theta_{mn}^{(1)} \quad (3.63)$$

(3.54), (3.57) および (3.63) 式から

$$I_0 = \frac{2}{\pi} \left(g_m \Theta_{01}^{(1)} E_g - \frac{\Theta_{0n}^{(1)}}{r_p} R I_n \right) \quad (3.64)$$

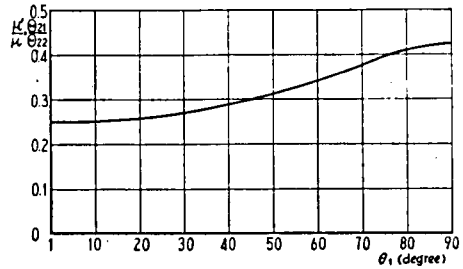
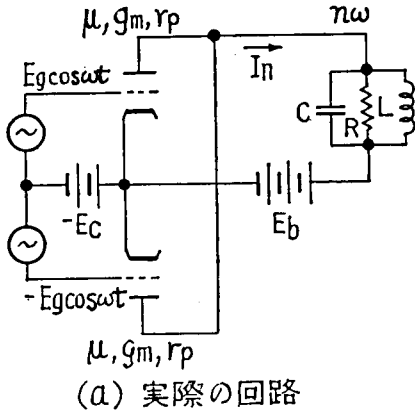


図 3.21 θ_1 と μ'/μ

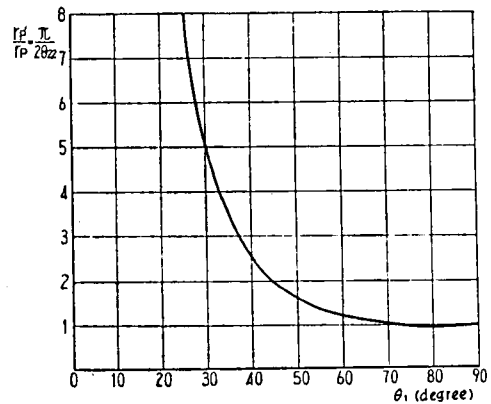
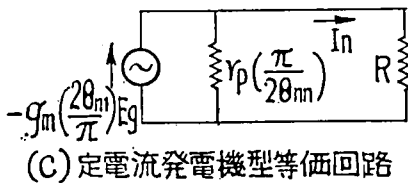
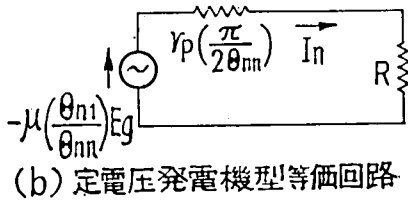


図 3.22 θ_1 と r_p'/r_p

図 3.20 Push—Push 型通倍器とその等価回路

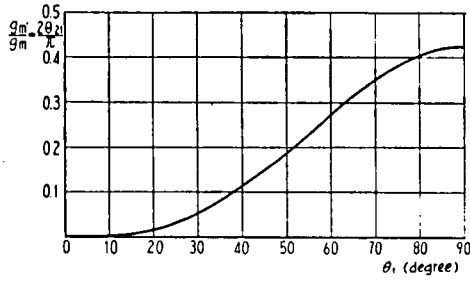


図 3.23 θ_1 と g'_m/g_m

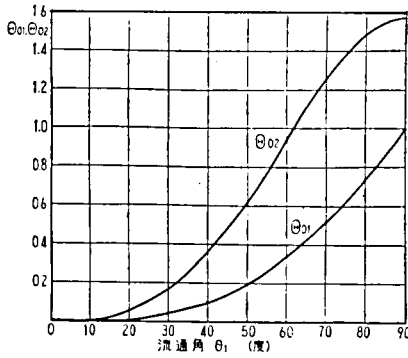


図 3.24 流通角 θ_1 と θ_{01}, θ_{02}

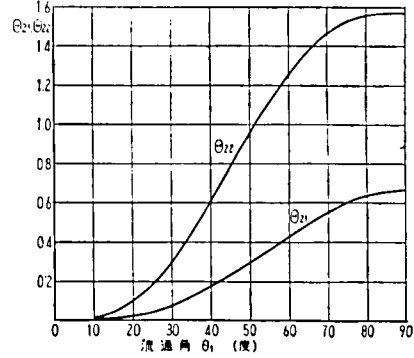


図 3.25 流通角 θ_1 と θ_{21}, θ_{22}

$$I_n = \frac{2g_m \Theta_{n1}^{(1)}}{\pi + \frac{2R}{r_p} \Theta_{nn}^{(1)}} E_g = \frac{\mu' E_g}{R + r_p} = \frac{g'_m E_g}{1 + \frac{R}{r_p}} \quad (3.65)$$

ここで

$$\mu' = \mu \frac{\Theta_{n1}^{(1)}}{\Theta_{nn}^{(1)}} \quad (3.66)$$

$$r'_p = r_p \left(\frac{\pi}{2\Theta_{nn}^{(1)}} \right) \quad (3.67)$$

$$g'_m = g_m \left(\frac{2\Theta_{n1}^{(1)}}{\pi} \right) \quad (3.68)$$

(3.65)~(3.68)式から、 I_n に関する限り、 μ' 、 g'_m および r'_p を用いて通常の増幅器のように取り扱うことができる。図 3.20 はその等価回路で、 $\Theta_{n1}^{(1)}$ 、 $\Theta_{nn}^{(1)}$ は簡単のため添数を省き、 θ_{n1} 、 θ_{nn} としてある。また、不要高調波成分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_m &= 0, m: \text{奇数} \\ I_m &= \frac{2}{\pi} \left(g_m \Theta_{n1}^{(1)} E_g - \frac{\Theta_{nn}^{(1)}}{r_p} R I_n \right), m: \text{偶数} \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

とくに $n=2$ のとき, I_0, I_1, I_2 などは次のようになる。

$$I_0 = \frac{2}{\pi} \left(g_m \Theta_{01} E_g - \frac{R}{r_p} \Theta_{02} I_2 \right) \quad (3.70)$$

$$I_1 = I_3 = I_5 = \dots = 0 \quad (3.71)$$

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \frac{2g_m \Theta_{21}}{\pi + \frac{2R}{r_p} \Theta_{22}} E_g = \frac{\mu'}{R + r_p} E_g \\ &= \frac{g'_m}{1 + \frac{R}{r_p}} E_g \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \mu' &= \mu \left(\frac{\Theta_{21}}{\Theta_{22}} \right) \\ r'_p &= r_p \left(\frac{\pi}{2\Theta_{22}} \right) \\ g'_m &= g_m \left(\frac{2\Theta_{21}}{\pi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi} \left(g_m \Theta_{41} E_g - \frac{R}{r_p} \Theta_{42} I_2 \right) \quad (3.74)$$

$$I_6 = \frac{2}{\pi} \left(g_m \Theta_{61} E_g - \frac{R}{r_p} \Theta_{62} I_2 \right) \quad (3.75)$$

ここで

$$\Theta_{01} = \sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1 \quad (3.76)$$

$$\Theta_{02} = \frac{\sin 2\theta_1}{2} - \theta_1 \cos 2\theta_1 \quad (3.77)$$

$$\Theta_{21} = \frac{1}{2} \left(\sin \theta_1 - \frac{\sin 3\theta_1}{3} \right) \quad (3.78)$$

$$\Theta_{22} = \theta_1 - \frac{\sin 4\theta_1}{4} \quad (3.79)$$

$$\Theta_{41} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 3\theta_1}{3} - \frac{\sin 5\theta_1}{5} \right) \quad (3.80)$$

$$\Theta_{42} = \frac{1}{4} \left(\sin 2\theta_1 - \frac{\sin 6\theta_1}{6} \right) \quad (3.81)$$

$$\Theta_{61} = \frac{1}{6} \left(\frac{\sin 5\theta_1}{5} - \frac{\sin 7\theta_1}{7} \right) \quad (3.82)$$

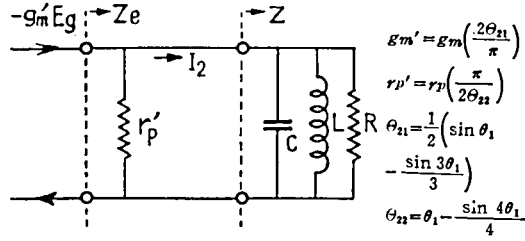


図 3.26 陽極負荷がわずかに離調した場合の Push—Push 型ダブラーの等価回路

$$\theta_{62} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sin 4\theta_1}{4} - \frac{\sin 8\theta_1}{8} \right) \quad (3.83)$$

(3.70)~(3.83)式は、 V_1 、 V_2 の特性、格子偏倚電圧および基本波入力平衡している場合のプッシュ・プッシュ形ダブラーに適用できる式である。図 3.21, 3.22 および 3.23 はそれぞれ (3.73) 式における μ'/μ 、 r'_p/r_p 、 g'_m/g_m の値を流通角 θ_1 が $0^\circ \sim 90^\circ$ の場合につき示す。また、 θ_{01} 、 θ_{02} を図 3.24 に、 θ_{21} 、 θ_{22} を図 3.25 に示す。

なお、(3.54) 式において、 $g_{m2}=0$ 、 $r_{p2}=\infty$ の特別の場合を考えると、1 本の真空管だけを使用した通倍器になり、各高調波成分を計算できる。

(2) ダブラの基本波入力電圧変化による位相変化

(1) で述べたプッシュ・プッシュ形ダブラーにおいて基本波入力電圧変化が通倍器出力の位相におよぼす影響を計算する。簡単のため、基本波入力および真空管特性は平衡していると仮定すると、(3.72) 式および図 3.20 の等価回路が使える。これらの結果は、陽極負荷が純抵抗 R のときのみ適用でき、陽極負荷が離調しているときは正確ではない。この場合、(3.50) 式の () 内第 3 項は

$$\frac{E_b - RI_n \cos(n\omega t + \phi)}{\mu}$$

の形となり、これから導かれる θ_{n1} 、 θ_{nn} などの形も異ってくる。しかし同調回路の離調度が小さく、かつ、 R/r_p が小さい場合、 θ_{n1} 、 θ_{nn} 、したがって、 I_n の大きさは純抵抗負荷の場合で近似できる。そこで、プッシュ・プッシュ形ダブラーの陽極回路が僅かに離調したとき、 I_2 に関する等価回路は図 3.26 のようになる。

いま、通倍利得 G_2 を負荷に生ずる第 2 高調波電圧の入力基本波に対する比で定義すると、図の等価回路により

$$G_2 = ZI_2/E_g = -g'_m Z_e \quad (3.84)$$

ここで、 Z_e は負荷インピーダンス Z とダブラーの等価内部抵抗 r'_p との並列インピーダンスで

ある。すなわち

$$1/Z_e = 1/r_p + 1/Z \quad (3.85)$$

$$1/Z = 1/R + j(\omega C - 1/\omega L) \quad (3.86)$$

$$g'_m = g_m(2\Theta_{21}/\pi) \quad (3.87)$$

$$r'_p = r_p(\pi/2\Theta_{22}) \quad (3.88)$$

$$\Theta_{21} = \frac{1}{2} \left(\sin \theta_1 - \frac{\sin 3\theta_1}{3} \right) \quad (3.89)$$

$$\Theta_{22} = \theta_1 - \frac{\sin 4\theta_1}{4} \quad (3.90)$$

また，通倍利得 G_2 の位相角を ϕ とすると，

$$\begin{aligned} \phi &= \arg(-g'_m Z_e) \\ &= \pi - \tan^{-1} R_e \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \end{aligned} \quad (3.91)$$

ここで

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{r'_p} + \frac{1}{R} \quad (3.92)$$

また，上の諸式では，陽極負荷における第2高調波の角周波数を ω とした。

インピーダンス Z_e の Q 値を Q_e ，離調度を v_e とすれば，(3.91)式は次式となる。

$$\phi = \pi - \tan^{-1} v_e \quad (3.93)$$

ここで

$$v_e = Q_e \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (3.94)$$

$$Q_e = \omega_0 C R_e = \frac{R_e}{\omega_0 L} \quad (3.95)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.96)$$

基本波入力電圧 E_g の変化に対する位相角 ϕ 変化率は (3.93) 式から

$$\frac{d\phi}{dE_g} = -\frac{1}{1+v_e^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{dQ_e}{dE_g} \quad (3.97)$$

この式に (3.92) と (3.95) 式を用いて

$$\frac{d\phi}{dE_g} = -\frac{v_e}{1+v_e^2} \frac{1}{1+\frac{r_p}{R}} \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_g} \quad (3.98)$$

E_g の微小変化 ΔE_g に対する ϕ の変化 $\Delta\phi$ は, (3.98) 式に (3.88), (3.52) および (3.72) 式を用いて次式で表される。

$$\Delta\phi = \frac{v_e}{1+v_e^2} F_1(\theta_1, R/r_p) \frac{\Delta E_g}{E_g} \quad (3.99)$$

ここで

$$F_1(\theta_1, R/r_p) = (\cos \theta_1 - \frac{G_{20}}{\mu} \cos 2\theta_1) f(\theta_1, R/r_p) \quad (3.100)$$

$$f(\theta_1, R/r_p) = \frac{1}{\Theta_{22}} \frac{d\Theta_{22}}{d\theta_1} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2\Theta_{22}} \frac{r_p}{R}} \cdot \frac{1}{\sin \theta_1 - \frac{G_{20}}{\mu} \left\{ 2\sin 2\theta_1 - \cos 2\theta_1 \left(\frac{1}{\Theta_{21}} \frac{d\Theta_{21}}{d\theta_1} - \frac{1}{\Theta_{22}} \frac{d\Theta_{22}}{d\theta_1} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2\Theta_{22}} \frac{r_p}{R}} \right) \right\}} \quad (3.101)$$

$$G_{20} = \frac{RI_2}{E_g} = \frac{\mu \left(\frac{\Theta_{21}}{\Theta_{22}} \right)}{1 + \frac{\pi}{2\Theta_{22}} \frac{r_p}{R}} \quad (3.102)$$

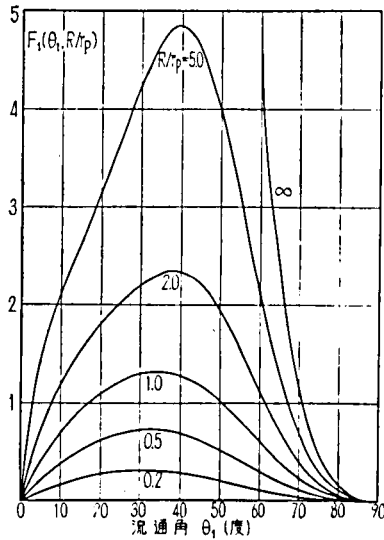


図 3.27 $F_1(\theta_1, R/r_p)$ と θ_1

(3.99) 式の $\frac{v_e}{1+v_e^2}$ は図 3.2 から、また、 $F_1(\theta_1, R/r_p)$ は図 3.27 から求められるので、この式の $\Delta\phi$ は、離調度 v_e 、流通角 θ_1 、 R/r_p および $\Delta E_g/E_g$ を知れば計算できる。図 3.27 に示された $F_1(\theta_1, R/r_p)$ の形から、 θ_1 は 90° に近い方が良く、 R/r_p も小さい方が良い。

数値例として、出力周波数 200 kHz のダブラを考える。 $v_e=0.2$ 、 $\theta_1=75^\circ$ 、 $R/r_p=2$ のとき、図 3.27 から $F_1(\theta_1, R/r_p)=0.19$ となる。そこで、 $\Delta E_g/E_g=0.01$ (≈ 0.1 dB) とすれば、(3.99) 式により

$$\Delta\phi = 3.65 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.021^\circ$$

この解析は、格子偏倚電圧 $-E_c$ が固定の場合であるから、 ΔE_g の影響を、格子電流バイアスを用いた後述の実験結果と比較することには問題があるが、100 MHz での位相変化は上記の値を 500 倍 ($= \frac{100 \text{ MHz}}{200 \text{ kHz}}$) すれば、 10.5° となり、図 3.38 の実験結果と同程度の値になる。

(3) ダブラの陽極供給電圧変化による位相変化

(2) と同様に、プッシュ・プッシュ形ダブラの陽極供給電圧が出力の位相におよぼす影響を計算する。出力の位相角は (2) と同様

$$\phi = \pi - \tan^{-1} v_e \quad (3.93)$$

で与えられる。 v_e は (3.94) 式で与えられるものと同じである。陽極電圧 E_b で位相角 ϕ を微分すると

$$\frac{d\phi}{dE_b} = \frac{1}{1+v_e^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{dQ_e}{dE_b} \quad (3.103)$$

(3.95)、(3.92) および (3.88) 式から明らかなように、 Q_e がダブラの等価陽極抵抗 r_p' の関数であることを考慮すれば

$$\frac{d\phi}{dE_b} = \frac{v_e}{1+v_e^2} \frac{1}{1+\frac{r_p}{R}} \frac{1}{r_p'} \frac{dr_p'}{dE_b} \quad (3.104)$$

(3.88) 式から

$$\frac{1}{r_p'} \frac{dr_p'}{dE_b} = \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_b} - \frac{1}{\Theta_{22}} \frac{d\Theta_{22}}{d\theta_1} \frac{d\theta_1}{dE_b} \quad (3.105)$$

流通角 θ_1 をきめる (3.52) 式から

$$\left(E_g \sin \theta_1 - \frac{2RI_2}{\mu} \sin 2\theta_1 \right) \frac{d\theta_1}{dE_b} + \frac{R}{\mu} \cos 2\theta_1 \frac{dI_2}{dE_b} = \frac{1}{\mu} \quad (3.106)$$

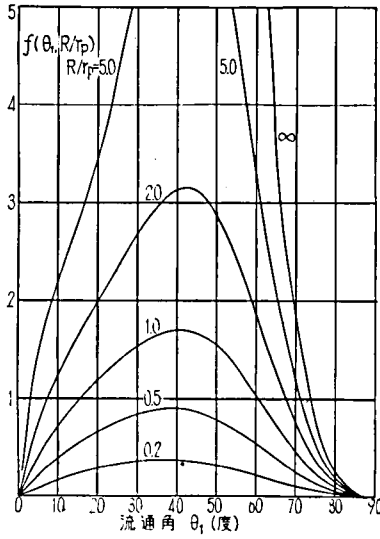


図 3.28 $f(\theta_1, R/r_p)$ と θ_1

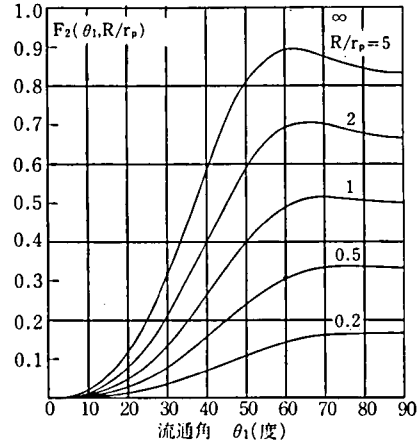


図 3.29 $F_2(\theta_1, R/r_p)$ と θ_1

(3.72) 式から、希望する第 2 高調波電流 I_2 が θ_1 と r_p の関数であることを考慮すると

$$\frac{dI_2}{dE_b} = \frac{dI_2}{d\theta_1} \frac{d\theta_1}{dE_b} + \frac{dI_2}{dr_p} \frac{dr_p}{dE_b} \quad (3.107)$$

(3.72) および (3.107) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_2} \frac{dI_2}{dE_b} = & \left(\frac{1}{\Theta_{21}} \frac{d\Theta_{21}}{d\theta_1} - \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2\Theta_{22}} \frac{r_p}{R}} \frac{1}{\Theta_{22}} \frac{d\Theta_{22}}{d\theta_1} \right) \frac{d\theta_1}{dE_b} \\ & - \frac{\pi}{2\Theta_{22}} \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2\Theta_{22}} \frac{r_p}{R}} \frac{dr_p}{dE_b} \end{aligned} \quad (3.108)$$

(3.106) および (3.108) 式から $\frac{d\theta_1}{dE_b}$ を計算し、さらに、(3.104) および (3.105) 式を考慮すれば、 E_b の微小変化 ΔE_b による位相変化 $\Delta\phi$ は次式で与えられる。

$$\Delta\phi = \frac{v_e}{1+v_e^2} \left\{ F_2(\theta_1, R/r_p) \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_b} - f(\theta_1, R/r_p) \frac{1}{\mu E_g} \right\} \Delta E_b \quad (3.109)$$

ここで

$$F_2(\theta_1, R/r_p) = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2\Theta_{22}} \frac{r_p}{R}} \left\{ 1 - \frac{G_{20}}{\mu} \left(\frac{\pi}{2\Theta_{22}} \right) \frac{r_p}{R} \cdot f(\theta_1, R/r_p) \cos 2\theta_1 \right\} \quad (3.110)$$

なお、上式の $f(\theta_1, R/r_p)$ は (3.101) 式で与えられている。図 3.28 および図 3.29 はそれぞれ

$f(\theta_1, R/r_p)$ および $F_2(\theta_1, R/r_p)$ の計算値を示しているの、陽極電源電圧変化 ΔE_b に対する通倍出力の位相変化 $\Delta\phi$ は $v_e, \theta_1, R/r_p, \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_b}$ および μE_g が分れば (3.109) 式で計算できる。

(2) の場合と同様、 $R/r_p, v_e$ が小さいほど ΔE_b に対する $\Delta\phi$ は小さい。図 3.28 および図 3.29 から θ_1 の可成り小さいところで $\Delta\phi$ が小さくなっているが、このような条件は、希望の第 2 高調波出力の点からは望ましくない。

数値例として、出力周波数 200 kHz のダブラを考える。いま、 $v_e=0.2, R/r_p=1, \theta_1=75^\circ$ とすれば

$$F_2(\theta_1, R/r_p)=0.51, f(\theta_1, R/r_p)=0.24$$

次に、 $\frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_b}$ の推定は困難であるが、真空管 5670 の静特性から $-\frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dE_b}=0.005/\text{V}$ と仮定する。また、 $\mu E_g=700$ と仮定すれば、(3.109) 式から、 $|\Delta\phi|=5.56 \times 10^{-4} \text{ rad/V}=0.032^\circ/\text{V}$ となる。電源変動の平均レートを後述のように $0.0001\%/s$ とすると実際の ΔE_b は $200 \times 10^{-6} \text{ V/s}=2 \times 10^{-4} \text{ V/s}$ 、したがって、この ΔE_b による等価的の周波数変動は 8.8×10^{-14} となり、実用的な限界を与えるが、これは後述のように、図 3.40 の数値（実測値）と同程度である。

(4) ダブラの周囲温度変化による位相変化

簡単のために、陽極負荷が単一同調回路の場合を考える。ダブラ出力における位相角 ϕ は既述のように

$$\phi = \pi - \tan^{-1} v_e \quad (3.93)$$

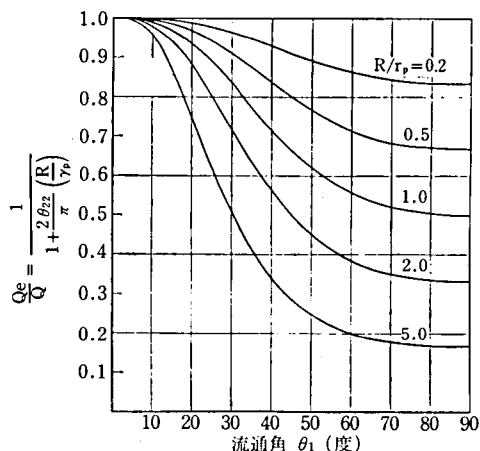


図 3.30 Q_c/Q と $\theta_1, R/r_p$ の関係

ここで

$$v_e = Q_e \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (3.94)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{第2高調波}) \quad (3.96)$$

$$Q_e = \omega_0 C R_e = \frac{R_e}{\omega_0 L} \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r_p} \frac{2\theta_{22}}{\pi} \quad (3.92)$$

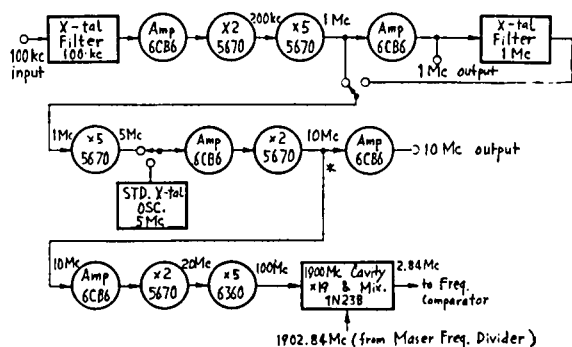


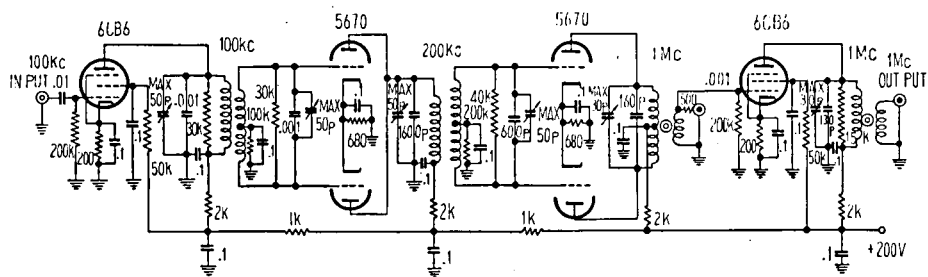
図 3.31 試作通倍器ブロック図

表 3.3 10 MHz における不要側波帯および高調波出力の希望波出力に対する相対値 (db), 10 MHz 出力電圧 1.5 V で測定

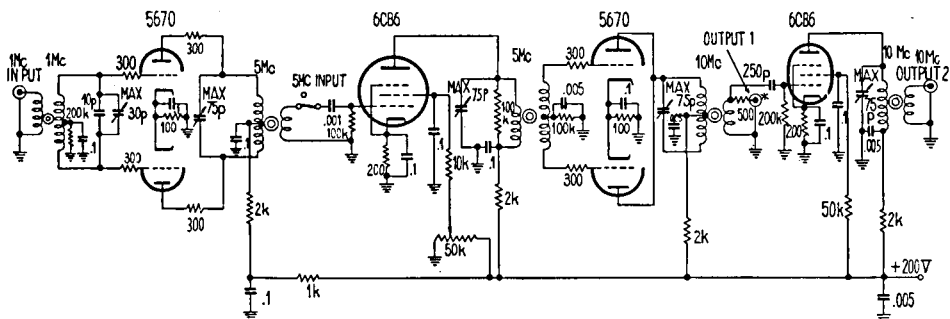
10.1 MHz	10.2	10.3	10.4	10.5	10.6	10.7	10.8
-81.1 (-90.3)以下	-71.4 (-90.6)以下	-90.7 以下 (-90.7)以下	-88.6 (-90.3)以下	-94.8 以下 (-94.8)以下	-87.0 以下 (-87.0)以下	-88.0 以下 (-88.0)以下	-88.8 以下 (-88.8)以下
	11	12	13	14	20	30	
	-74.7 (-74.5)	-76.6 (-77.4)	-84.2 (-84.4)	-92.0 (-90.4)	-62.2 (-62.5)	-40.0 (-41.4)	

9.9 MHz	9.8	9.7	9.6	9.5	9.4	9.3	9.2
-78.8 (-88.8)以下	-70.3 (-87.3)以下	-87.0 以下 (-87.0)以下	-87.4 (-86.4)以下	-85.8 以下 (-85.8)以下	-93.2 以下 (-93.2)以下	-92.2 以下 (-92.2)以下	-91.5 以下 (-91.5)以下
9.1	9	8	7	6	5	4	
-90.8 以下 (-90.8)以下	-84.9 (-85.5)	-79.7 (-79.7)	-85.6 (-90.0)以下	-105.1 (-99.1)以下	-97.5 (-102.2)	-101.5 (-111.5)	

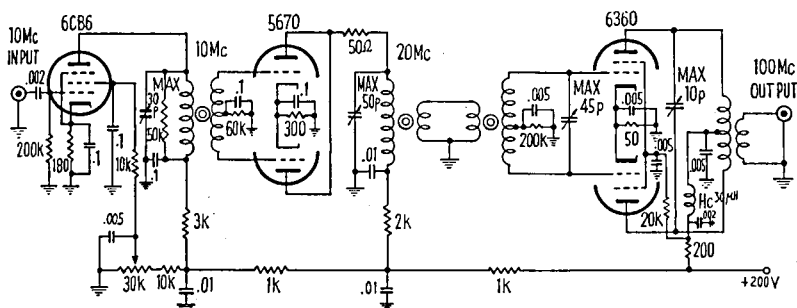
() 内は 1 MHz 水晶波器を使用した場合の測定値を示す



(a) 100kHz → 1MHz



(b) 1MHz → 10MHz



(c) 10MHz → 100MHz

図 3.32 周波数倍器 (100 KHz → 100 MHz) 回路

$$\Theta_{22} = \theta_1 - \frac{\sin 4\theta_1}{4} \quad (3.90)$$

周囲温度変化 $\Delta\theta$ に対する位相変化量 $\Delta\phi$ は第 3.2 節と同様の考察により

$$\Delta\phi = \frac{2Q_e a \omega_0}{1 + v_e^2} \Delta\theta \quad (3.111)$$

ただし、 $\omega \approx \omega_0$ と仮定した。

(3.95) および (3.92) 式から

$$Q_e = \frac{Q}{1 + \frac{R}{r_p} \frac{2\theta_{22}}{\pi}} \quad (3.112)$$

ここで

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (3.113)$$

は同調回路だけの Q 値である。図 3.30 は Q_e/Q , θ_1 , R/r_p の関係を図示したもので、これと (3.111) 式により、温度変化による位相変化 $\Delta\phi$ が計算できる。 θ_1 は 90° に近いことが望ましく、 R/r_p は他の条件が許す限り、大きい方が $\Delta\phi$ は小さくなる。

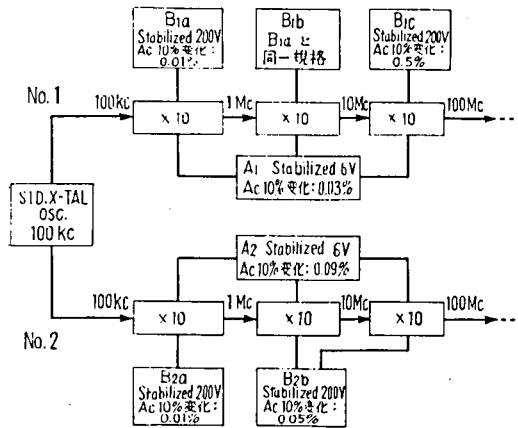


図 3.33 周波数通倍器供給電源 (A_2 および B_{2a}) の変動状況は図 3.34 に示される

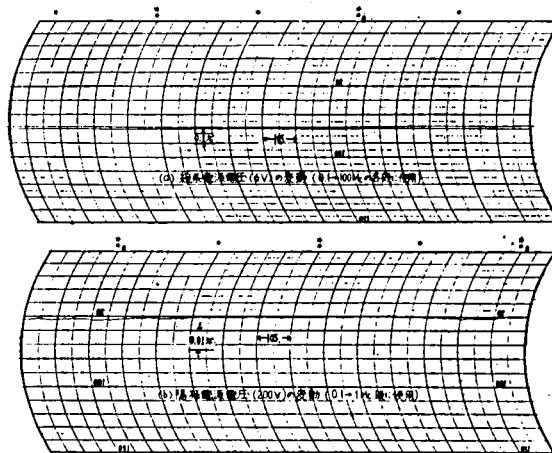


図 3.34 通倍器の線条および陽極電源圧の変動状況

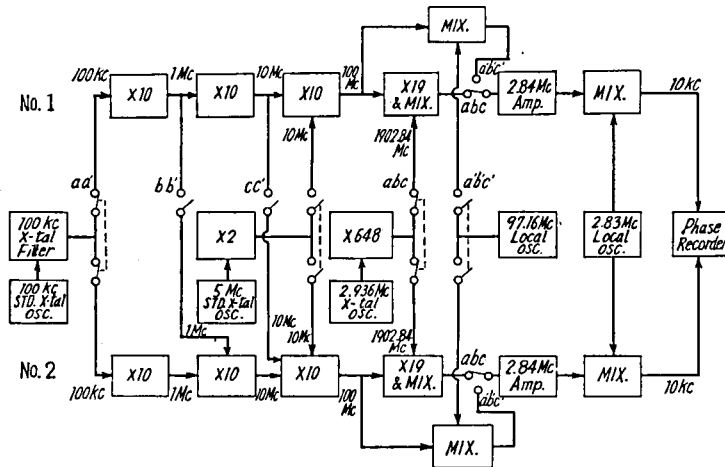


図 3.35 周波数通倍器の位相変動測定

3.3.2 実験とその結果

(1) 試作通倍器

図 3.31 および図 3.32 (a), (b), (c) は試作通倍器のブロック図および回路図である。回路、真空管などは、周波数一次標準のアンモニア・メーザと標準用水晶発振器の周波数比較に使用された通倍器と類似のものであるが、設計上とくに次の点に留意した。

(i) 各通倍、増幅段の同調回路の固有周波数の温度係数 α_{ω_0} を $2 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ 以下にし、同調回路の Q 値、したがって、 $Q\alpha_{\omega_0}$ の値をできるだけ小さくし、周囲温度変化による通倍器出力の位相変化を小さくした。とくに、100 kHz から 1 MHz までの部分は最も重要なので、同調回路には Q 値を適当に低くした複同調回路を使用し、位相安定度の向上と不要側波帯抑圧を計った。表 3.3 は 10 MHz 出力における (図 3.31 および図 3.32 (b) の * 印の点における) 不要側波帯および不要高調波出力の希望波出力 (10 MHz) に対する相対値 (dB) を示す。また、() 内の数値は図 3.31 に示すように、1 MHz 段に水晶フィルタを使用したときのものである。前述のように、もしフィルタの $Q\alpha_{\omega_0}$ の値が適当であれば、このような水晶フィルタは温度変化による位相変化をとまなうことなく不要側波帯除去に非常に有効であり、スペクトル純度の高い通倍出力が得られる。

(ii) 通倍器の陽極および線条電源は図 3.33 のような性能のものを使用しているが、とくに線条電源は 100 kHz から 100 MHz までの各段とも陽極電源とはほぼ同程度に安定化したものを用い、通倍器出力の位相安定度向上に努めた。図 3.34 (a) および (b) は、それぞれ図 3.33 の電源 A_2 および B_{2a} の電圧変動を示している。

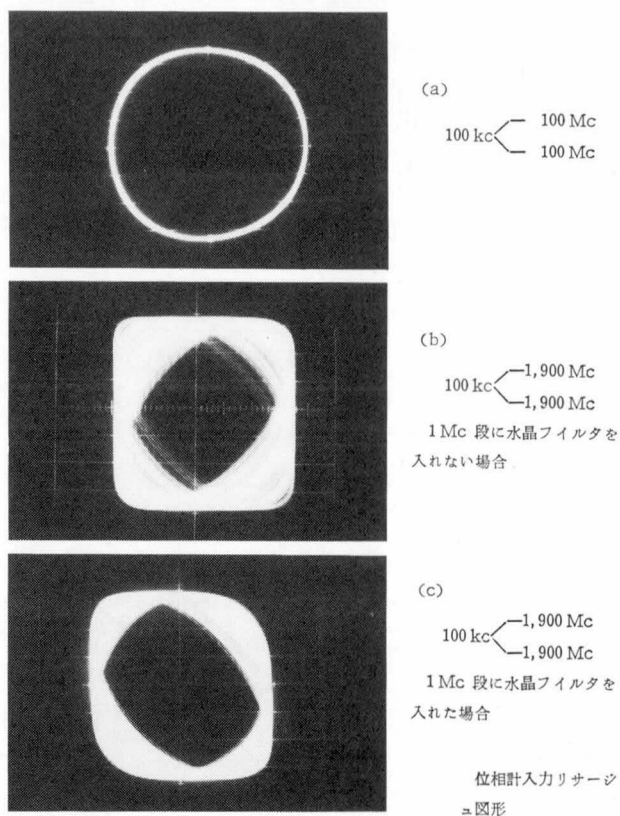


図 3.36 位相計入力リサージュ図形

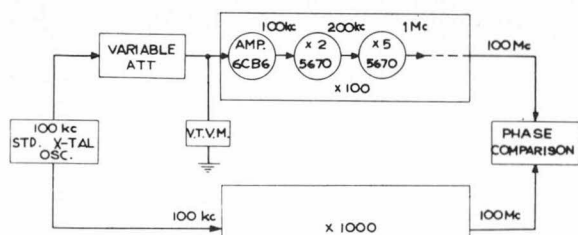


図 3.37 信号入力 (100 kHz) 電圧変化による位相変化の測定

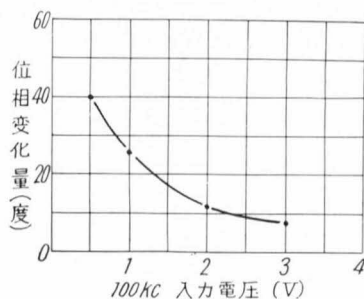


図 3.38 入力レベル変化 0.1 dB による位相変化 (100 MHz)

(2) 位相変動の測定方法

図 3.31 に示した試作通倍器 (100 kHz → 1.9 GHz) のほかに、別の通倍器 1 系統を用い、図 3.35 に示す方法で、通倍器位相変動を測定した。通倍器の入力信号周波数と通倍数の影響を調べるため、次の六つの場合につき実験した。

表 3.4 陽極および線条電源変化による 100 MHz 通倍出力の位相変化

Multiplier block changes of power supply	0.1 → 1 MHz	1 → 10 MHz	10 → 100 MHz
Plate 195 V 2.5%	29°	31°	2°
Filament 6 V 3.3%	20°	21°	11°
A.C. 100 V 10%	less than 5°		

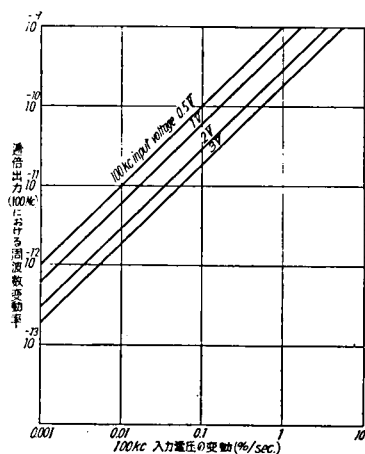


図 3.39 100 kc 入力電圧の変動による通倍器出力 (100 Mc) における周波数変動 (図 3.38 の測定値による)

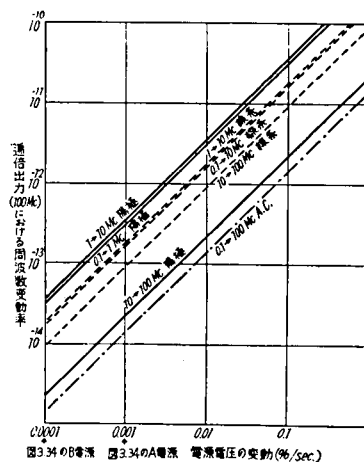


図 3.40 供給電源圧(陽極, 線条, AC)の変動による通倍出力(100 Mc)の周波数変動(表 3.3 の測定値による)

Case a : 100 kHz → 1.9 GHz

Case a' : 100 kHz → 100 MHz

Case b : 1 MHz → 1.9 GHz

Case b' : 1 MHz → 100 MHz

Case c : 10 MHz → 1.9 GHz

Case c' : 10 MHz → 100 MHz

a, b, c で必要な局部発振周波数 (1.90284 GHz) はアンモニア・メーザ装置からとっている。

図 3.36 の写真は, 位相計入力 (10 kHz) における両通倍出力間の位相差を示すリサージュ図形で, (a) は 100 kHz から 100 MHz まで, (b) は 100 kHz から 1.9 GHz までの通倍の場合である。なお, (c) は (b) において, 両系統の 1 MHz 段に水晶フィルタを挿入した場合の結果で, S/N

改善効果が認められる。

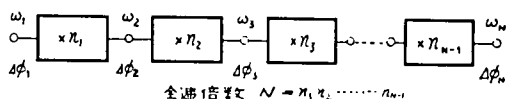
(3) 信号入力電圧変化による位相変化の測定

図 3.37 に示すように、可変抵抗減衰器により 100 kHz 入力電圧をある値に設定し、その値を中心 ± 0.1 dB のステップで微小変化を与えたときの位相変化を 100 MHz 出力段で測定した。その結果を図 3.38 に示す。通倍器入力レベルはある程度以上大きい方が位相変化は小さい。入力レベルの時間的变化による通倍出力の等価的な周波数変化を図 3.38 を用いて書き直したのが図 3.39 である。入力電圧 0.5 V のとき、等価的な周波数変動を 10^{-12} 以下にするためには、入力レベルの変動は 0.001%/s 以下であることが必要である。

(4) 陽極および線条供給電圧変化による位相変化の測定

100 kHz から 100 MHz までの通倍器を 100 kHz \rightarrow 1 MHz, 1 MHz \rightarrow 10 MHz, 10 MHz \rightarrow 100 MHz の 3 ブロックに分け、各ブロックの陽極または陰極電源電圧を変化させ、ほかのブロックおよび他方の通倍系統の電源電圧はすべて一定としたときの位相変化を 100 MHz 出力段で測定した。その結果は表 3.4 のとおりである。このような測定では、供給電源電圧変化の影響は、通倍器の回路形式、通過帯域特性が同じなら、通倍の初段に近いほど大きいはずであるが、表 3.4 の結果では、逆に 0.1 \rightarrow 1 MHz の方が 1 \rightarrow 10 MHz よりも電源変化の影響が小さい。その理由として、(a) 0.1 \rightarrow 1 MHz の部分を重視して、通過帯域を広げたこと、(b) 多段の通倍器では動作が複雑で、調整次第では、各段の影響が加わり合うことも、逆に打消し合うこともありうるということが考えられる。また、AC 100 V を変化させたときの測定値も表に示されている。これらの結果を電源電圧の時間的变化による通倍出力の等価的な周波数変化に書き直したのが図 3.40 である。

2.2 節の実験と考察により、原子周波数標準器と標準用水晶発振器または後者相互の短時間周波数比較には約 10 秒間測定が最適なことが分った。そこで、図 3.40 および図 3.34 の結果から、0.1 \rightarrow 1 MHz ブロックの陽極電源により、100 MHz 出力でどれくらいの周波数変動が 10 秒間の周波数測定で起り得るかを推定して見る。この電源の変動の代表的な値は、図 3.34 (b) から、10 秒間経過で 0.001%、したがって、0.0001%/s 程度またはそれ以下である。この値を図 3.40 に適用すると、このブロックの陽極電源の変動の影響は周波数変動率で 1×10^{-13} 以下である。1 \rightarrow 10 MHz ブロックに同様の電源を用い、終段の 10 \rightarrow 100 MHz ブロックにこれらより 1 桁程度安定度の悪い電源を使用したとしても、陽極電源変化の影響の総和は 10^{-13} 程度であ



3.41 多段通倍器における位相変化

り、通倍器の調整状態などによる位相安定度の劣化を見込んでも、 $10^{-13} \sim 10^{-12}$ 程度と見ることができる。

線条電源についても、上述と同様の考察により、電源電圧変化の影響は3つのブロックを総合して、 5×10^{-13} 程度であり、余裕を見ても 1×10^{-12} くらいである。

以上の考察から、100 kHz から 100MHz までの通倍では、陽極および陰極線条電源変動の影響は 10 秒間の周波数測定で 1×10^{-12} 程度と考えていい。

(5) 周囲温度変化による位相変化の測定

既に第 3.2 節で述べたように、1.9 GHz までの通倍器のうち、100 kHz から 1 MHz までの部分について行った。その方法と結果は既出の図 3.4、表 3.1 および図 3.5 のとおりである。既述のように、 $Q_e \alpha_{\omega_0}$ が大きい程、また、低周波数段ほど温度変化の影響が大きい。

電源電圧変化の影響のところで述べたように、短時間での周囲温度変化が分れば、図 3.5 からこれによる周波数変化が分る。図 3.4 の測定で使用した熱電対温度計のほかに、静電容量とその温度係数既知のセラミックコンデンサを温度センサとした LC 発振器による温度計を用いて、通倍器各部の短時間の温度変動を測定した。それによれば、コイルケースや比較的小形の密閉シャーシ内の温度変化は、10 秒の時間経過でおよそ $5 \times 10^{-3}^{\circ}\text{C}$ 、したがって、 $5 \times 10^{-4}^{\circ}\text{C/s}$ であった。この値を図 3.5 に適用すると、100 kHz 増幅器(複同調形)や 200 kHz 通倍器では、10 秒平均周波数の変動は 1×10^{-12} 以下であるが、100 kHz 水晶フィルタでは約 2×10^{-11} となる。

このように、温度効果についても、一般に通倍の初段付近が重要であるが、後段も含めた総合の温度効果を計算で推測して見る。

図 3.41 図のように、温度変化による各周波数段の位相変化を $\Delta\phi_i (i=1, 2, \dots, N)$ とするとし、(3.15) 式(単同調の場合)および(3.26) 式(複同調臨界結合の場合)において $v_e=0$ (コイルが同調の場合) とおけば

$$\Delta\phi_i = 2Q_i \alpha_i \Delta\theta_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3.114)$$

となる。 $Q_i, \alpha_i, \Delta\theta_i$ はそれぞれ各周波数段の同調回路の Q 、共振周波数の温度係数、温度変化である。通倍出力 (ω_N) における位相変化を $\Delta\phi_{1-N}$ とすると

$$|\Delta\phi_{1-N}| = N \left(k_1 |\Delta\phi_1| + \frac{k_2}{n_1} |\Delta\phi_2| + \frac{k_3}{n_1 n_2} |\Delta\phi_3| + \dots + \frac{k_N}{N} |\Delta\phi_N| \right) \quad (3.115)$$

となる。ここで、 k_1, k_2, \dots, k_N は各周波数段における同調回路の個数である。

いま、簡単のために、温度係数 α_i 、温度変化 $\Delta\theta_i$ がすべての段で等しいと仮定する。また、同調回路の Q 値は周波数の平方根に比例すると仮定すると、(3.115) 式は次のようになる。

図 3.42 通倍器の温度による位相変化における 0.1, 1, 100 MHz 段以降の寄与, 図のプロットは横軸の周波数段以降の影響が初段のみの場合の何倍かを示す

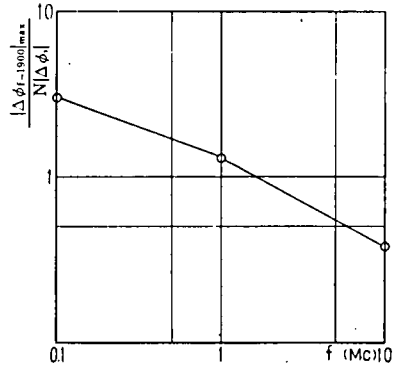


表 3.5 周波数通倍器の位相変動実測値

	入力および出力 周波数(Mc)	通倍次数	位相変動 (度)	観測時 間間隔 (秒)	周波数 変動率	位相変動 (度)	観測時 間間隔 (秒)	周波数 変動率
Case a	0.1 → 1,900	19,000	16.9	10	2.5×10^{-12}	14.8	100	2.2×10^{-13}
a'	0.1 → 100	1,000	1.2	10	3.4×10^{-12}	0.76	100	2.1×10^{-13}
b	1 → 1,900	1,900	9.4	10	1.4×10^{-12}	12.5	100	1.8×10^{-13}
b'	1 → 100	100	0.33	10	9.2×10^{-13}	0.41	100	1.1×10^{-13}
c	10 → 1,900	190	2.9	10	4.3×10^{-13}	11.2	100	1.6×10^{-13}
c'	10 → 100	10	0.21	10	5.8×10^{-13}	0.20	100	5.4×10^{-14}

$$|\Delta\phi_{1-N}| = N |\Delta\phi_1| \{k_1 + k_2 n_1^{-\frac{1}{2}} + k_3 (n_1 n_2)^{-\frac{1}{2}} + \cdots + k_N (n_1 n_2 \cdots n_{N-1})^{-\frac{1}{2}}\} \quad (3.116)$$

この式を図 3.31 の通倍器（水晶フィルタは除く）に適用すると

$$n_1 = n_4 = n_5 = 2, \quad n_2 = n_3 = n_6 = 5,$$

$$n_7 = 19, \quad N = 19,000,$$

$$k_1 = k_2 = k_7 = k_8 = 1,$$

$$k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 2$$

よって (3.116) 式から次式を得る。

$$|\Delta\phi_{1-N}| = 3.003 N |\Delta\phi_1| \quad (3.117)$$

同様に 1 MHz → 1.9 GHz の通倍区間では

$$|\Delta\phi_{10-N}| = 1.96 N |\Delta\phi_1| \quad (3.118)$$

10 MHz → 1.9 GHz の区間では

$$|\Delta\phi_{100-N}| = 0.38 N |\Delta\phi_1| \quad (3.119)$$

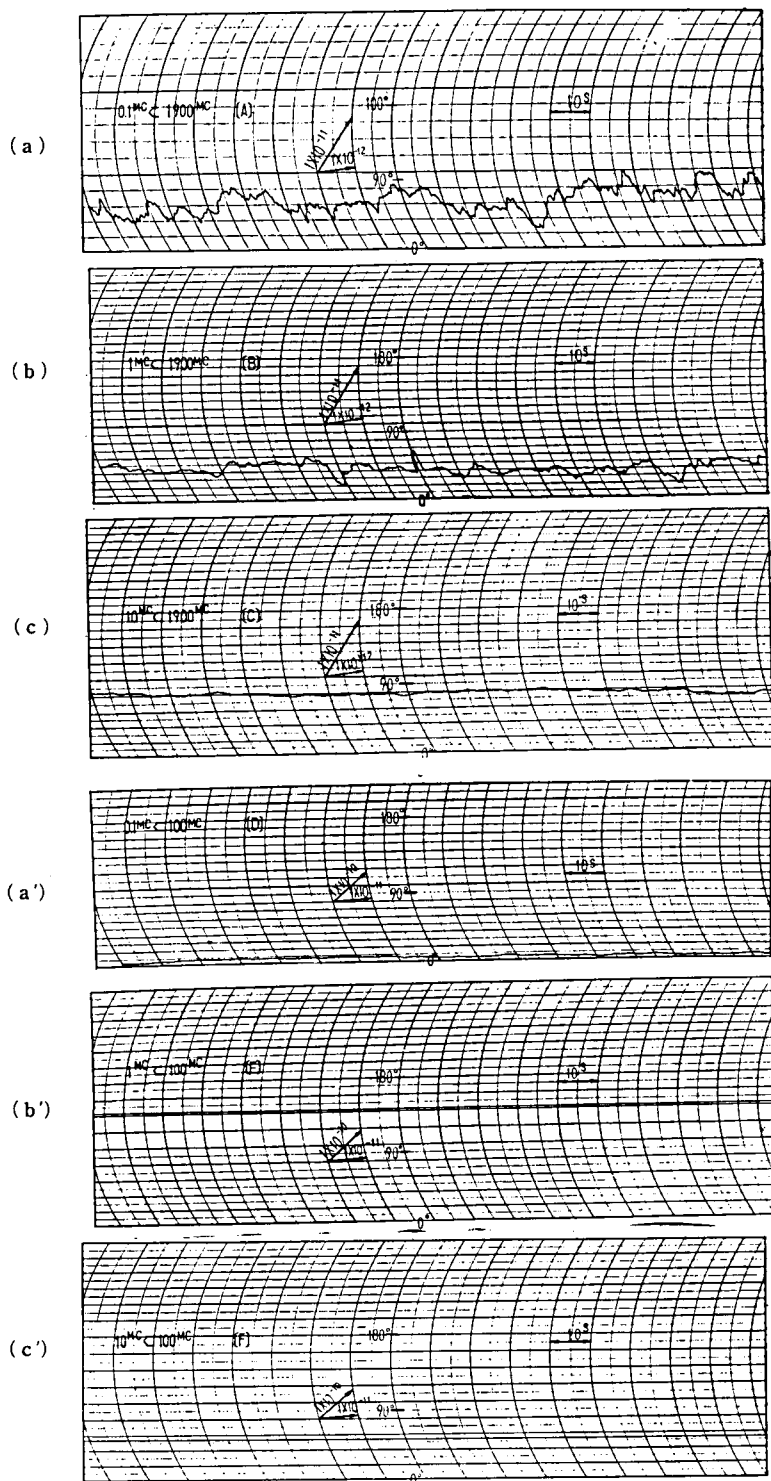
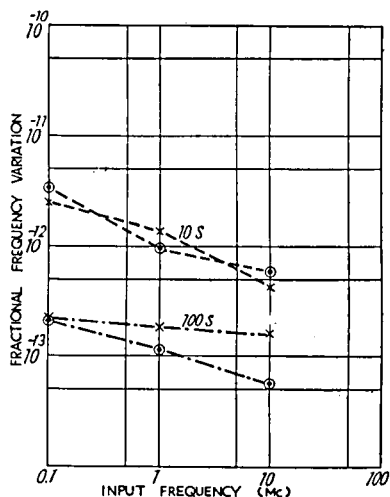


図 3.43 通倍器の位相変動記録



● Measured at 100 Mc;
× Measured at 1900 Mc.

図 3.44 通倍器の位相変動記録

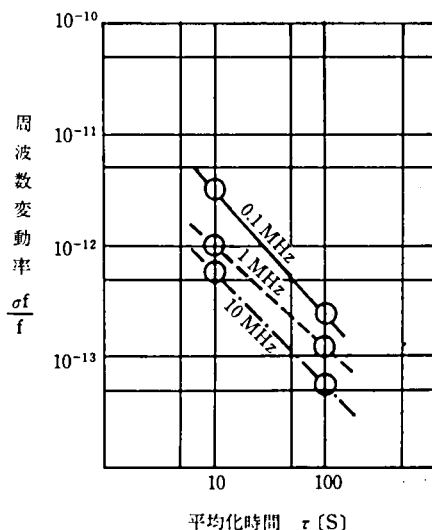


図 3.45 $\sigma f/f$ 対 τ (100 MHz での測定)

(3.117), (3.118) および (3.119) 式の値を $N |\Delta\phi_1|$ (初段のみの寄与) で基準化したのが図 3.42 である。横軸の値は各通倍区間の最初の周波数を表している。

(6) 通倍器相互の位相変動測定

通倍器 2 系統を室温、電源とも平常の状態で作動させた時、自然に生ずる位相変動を図 3.35 の接続で測定した。1 MHz の水晶フィルタは取り除いた——100 kHz 水晶フィルタは 1 個が共通に入っている、その影響は現れない。図 3.35 に記載の Case a, b, c; a', b', c' における測定記録の一部を図 3.43 の a, b, c; a', b', c' に示す。これらの位相変動記録を 10 秒および 100 秒毎にそれぞれ約 100 個および約 25 個読み取り、平均の位相変動量を求め、さらに、これらの値から 10 秒および 100 秒平均の周波数変動率を計算した。その結果を表 3.5 に示す。また、この表の結果を通倍器への入力周波数および測定時間についてプロットしたのがそれぞれ図 3.44 および図 3.45 である。入力周波数が高い程周波数変動率は小さく、通倍数はさほど影響していない。また、同じ通倍器入力周波数の場合、100 秒平均周波数の方が 10 秒平均周波数よりも変動率が小さい。これらの表および図から、100 kHz → 100 MHz または 100 kHz → 1.9 GHz の通倍では、10 秒平均周波数の変動率——測定時間 10 秒における変動率と言ってもいい——はおおよそ 3×10^{-12} である。この値は、(4) で述べたように、供給電源変動の影響が 1×10^{-12} あるいはそれ以下であること、および (5) の図 3.5 と図 3.42 に関連した議論から可成り妥当な値である。なお、10 MHz → 100 MHz または 10 MHz → 1.9 GHz の通倍では、10 秒平均周波数の変動率は約 5×10^{-13} 、100 秒平均では $5 \times 10^{-14} \sim 2 \times 10^{-13}$ くらいである。

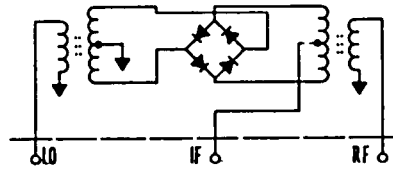


図 3.46 2重平衡混合器

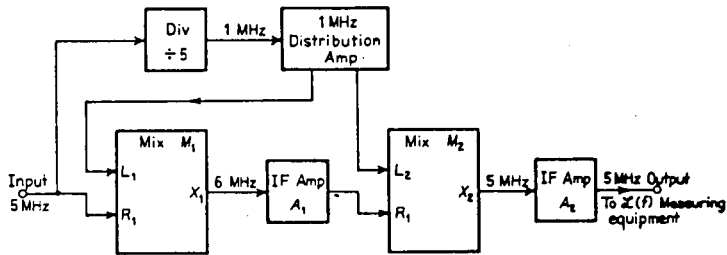


図 3.47 周波数混合器位相雑音測定回路

3.3.3 結 論

(1) プッシュ・プッシュ形ダブラの解析を行い，入力信号電圧，陽極電源電圧，周囲温度変化のダブラ出力信号位相におよぼす影響を推定し，これらを実測値と比較し，周囲温度については良く一致した。

(2) 通倍器各段，とくに初段に近い部分の通過帯域，位相対温度特性，供給電源の安定度を適当にすることにより，100 kHz → 100 MHz，または 100 kHz → 1.9 GHz の通倍器の周波数変動を 10 秒測定 (10 秒平均) で 10^{-12} の程度にできる。10 MHz からの通倍では， 10^{-13} の程度になる。また 100 秒測定では，それぞれ約 1 桁変動が小さくなる。

(3) 通倍器の位相変動，したがって周波数変動の要因は周囲温度と供給電源の変動である。温度変動の影響は 100 kHz → 100 MHz または 100 kHz → 1.9 GHz の場合，10 秒測定で 10^{-12} 程度，供給電源変動の影響は $10^{-13} \sim 10^{-12}$ 程度である。

真空管雑音，とくに低周波雑音 (フリッカ雑音) の影響は，この測定では明らかでない。

(4) 通倍器の入力段における水晶フィルタの使用は，通倍出力信号の質 (スペクトル純度，あるいは短時間周波数安定度) の向上 (改善) に有効である。しかし，周囲温度変化の影響を軽減するために $Q_e \alpha \omega_0$ の値を適当にし，さらに恒温槽を用いることが望ましい。

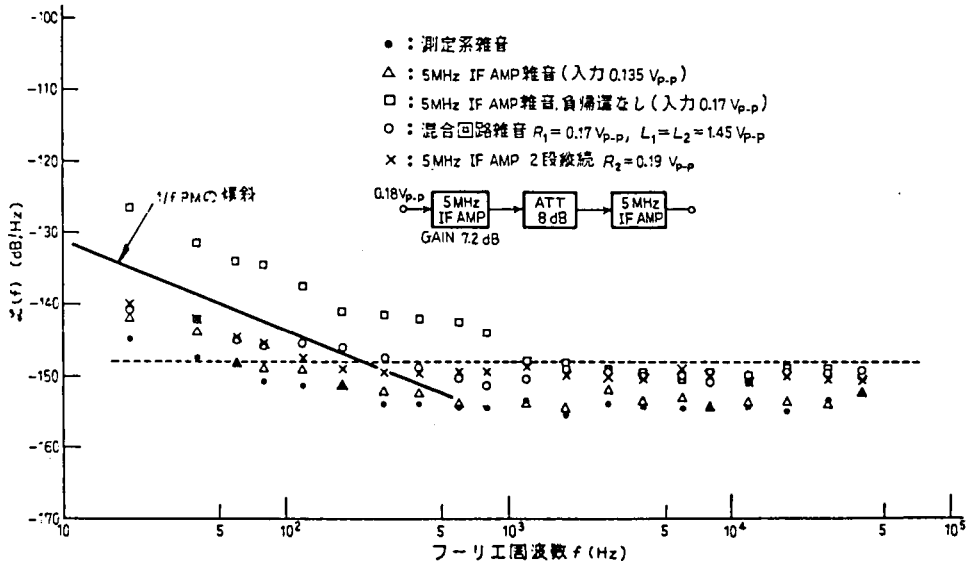


図 3.48 周波数混合回路の位相雑音スペクトル

3.4 周波数混合器^{(20),(43)}

図 3.46 に示すようなショットキーバリアダイオードを用いた 2 重平衡混合器の位相雑音の測定と、混合器および増幅器の位相雑音とこれらの雑音指数との関係につき述べる。混合器はふつう“リング変調器”と言われるもので、第 2.3 節などでは位相差検出器として用いられているほか、周波数通倍器にも使用できる。

3.4.1 位相雑音の測定

混合器位相雑音の測定方法を図 3.47 に示す。2 回の周波数混合（変換）により、入力周波数と同じ周波数の出力信号を得る。この位相雑音（尺度 $S_\phi(f)$ ）を第 2.3 節の方法で測定する。高周波同調増幅（6 MHz と 5 MHz）には低雑音のトランジスタを用い、第 3.2 節で述べたように、それぞれに負帰還をかけてある。これらの増幅器の 6 dB 低下の周波数帯域幅は約 100 kHz である。出力信号には混合器自身の雑音のほか、入力信号（5 MHz）と局部発振器（1 MHz）の雑音が含まれるが、これらはこの測定方法ではそれぞれ相殺され、結果には現れない。各混合器の 2 つの入力電圧（高周波入力 R_1, R_2 ；局部発振入力 L_1, L_2 ）をそれぞれ次図の中に示す。

“混合器雑音”の測定結果を図 3.48 に○印で示す。また、図 3.47 右端部の $S_\phi(f)$ 測定系自身の寄与（測定系雑音）も同時に●印で示す。“混合器雑音”は、フーリエ周波数 f が約 1 kHz 以上では、ほぼ一定——10 個の平均は -150 dB——であり、混合器と増幅器の白色位相雑音の寄与

と考えていい。これに対し、約 500 Hz 以下では、 f に逆比例の傾向にあり、 $1/f$ 位相雑音の影響を受けていると考える。

また、図 3.48 の×印は、減衰器 (8 dB) をはさんだ 2 段の 5 MHz 増幅器の $\mathcal{L}(f)$ の測定結果で、“混合器雑音”における増幅器——1 段目は 5 MHz ではなく、6 MHz 増幅器であるが——の影響を評価するためのものである。この図によれば、増幅器 2 段の雑音は“混合器雑音”とはほぼ等しく、とくに、 $f \geq$ 約 1 kHz での 10 個の平均は両者で一致した (−150 dB)。また、上述の 6 MHz 増幅器と 2 段のうちの 1 段目の 5 MHz 増幅器の $\mathcal{L}(f)$ を比較測定したが、この測定系の分解能ではほとんど差がなかった。

したがって、上記 2 つの測定結果から、系の分解能に問題はあるが、混合器自身の位相雑音は増幅器のそれよりも可成り小さいと言える。 $\mathcal{L}(f)$ 測定系雑音の改善策として、(1) 位相差検出器の入力電圧を十分大きくする——これにより AM → PM 変換が軽減できる。(2) 位相差検出器の終端抵抗を適当にするなどの提案がある。

3.4.2 混合器および増幅器の位相雑音と雑音指数

上述の実験における増幅器は何れも入力電圧が 0.05～0.06 V (実効値) で動作している。また、混合器の高周波入力電圧 (0.06～0.07 V (実効値)) は局部発振入力電圧 (約 0.5 V (実効値)) に比較して十分小さい。したがって、これらを線形回路として取り扱い、利得や雑音指数を定義できる。

信号源 (発振器) および供試線形回路で発生する雑音を回路の中心周波数 (ここでは、6 MHz または 5 MHz) のまわりに帯域制限された白色雑音と仮定すると、供試回路の位相雑音は次式で示される⁽³⁷⁾。

$$\mathcal{L}(f) = 10 \log [2kTR_0(F-1)/V_{rms}^2] \quad (3.120)$$

ここで、 $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K (ボルツマン定数)、 $T = 300$ K、 R_0 = 信号源抵抗、 F = 供試線形回路の雑音指数、 V_{rms} = 供試回路入力電圧実効値である。

次に (3.120) 式による計算値と前述の測定結果を比較する。

図 3.47 における混合器と増幅器の利得および雑音指数を表 3.6 のように表す。

まず、“混合器雑音”の場合、総合の雑音指数は次式で与えられる。

表 3.6 混合器と増幅器の利得と雑音指数 *印は実測値、これ以外はカタログの代表値

	混 合 器 [dB]		増 幅 器 [dB]	
	M ₁	M ₂	A ₁	A ₂
利 得	−6	−6	6.8*	—
雑音指数	6	6	3	3

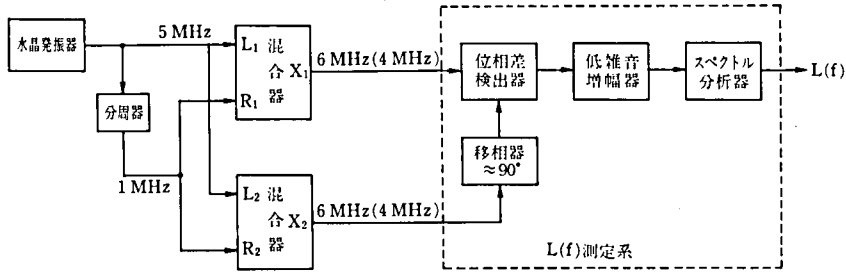


図 3.49 混合器位相雑音測定法（改良案）

$$F = F_{M1} + \frac{F_{A1}-1}{G_{M1}} + \frac{F_{M2}-1}{G_{M1} \cdot G_{A1}} + \frac{F_{A2}-1}{G_{M1} \cdot G_{A1} \cdot G_{M2}} \quad (3.121)$$

この式に

$$F_{M1} = F_{M2} = 4 = 6 \text{ dB (カタログ)}$$

$$F_{A1} = F_{A2} = 2 = 3 \text{ dB (データシート)}$$

$$G_{M1} = G_{M2} = 0.25 = -6 \text{ dB (カタログ)}$$

$$G_{A1} = 4.8 = 6.8 \text{ dB (実測)}$$

$$R_o = 50 \Omega, T = 300 \text{ K},$$

を代入すると

$$F = 13.8 = 11.4 \text{ dB} \quad (3.122)$$

となる。この値と $V_{rms} = 0.06 \text{ V}$ （実効値）を (3.120) 式に代入すると

$$\mathcal{L}(f) = -148.3 \text{ dB} \quad (3.123)$$

(3.123) 式の計算値と前述の“混合器雑音”における $f \geq 1 \text{ kHz}$ での平均値 -150 dB とは大体一致している。

次に図 3.48 のプロット（×印）に対応して、減衰器（8 dB）をはさんだ 5 MHz 2 段増幅器の $\mathcal{L}(f)$ を計算する。

この場合の総合の雑音指数は次式で示される。

$$F = F_{A1} + \frac{F_{ATT}-1}{G_{A1}} + \frac{F_{A2}-1}{G_{A1} \cdot G_{ATT}} \quad (3.124)$$

ここで、 F_{ATT} および G_{ATT} はそれぞれ減衰器の雑音指数および利得である。上式において

$$F_{A1} = F_{A2} = 2 = 3 \text{ dB (データシート)}$$

$$G_{A1} = 5.25 = 7.2 \text{ dB (実測)}$$

$$F_{ATT}=6.3=8\text{ dB}$$

$$G_{ATT}=0.158=-8\text{ dB}$$

$$V_{rms}=0.064\text{ V (実効値, 実測)}$$

とすれば

$$F=4.2=6.2\text{ dB} \quad (3.125)$$

となる。この値を (3.120) 式に適用し

$$\mathcal{L}(f)=-154.8\text{ dB} \quad (3.126)$$

(3.126) 式の値は対応する測定値 -150 dB —— $f \geq 1\text{ kHz}$ での平均値——と約 5 dB 違う。この差が生じた原因として次のことが考えられる。

- (1) 5 MHz 増幅器の雑音指数はデータシートによる推定値であり、実際はもう少し大きい。
- (2) 位相雑音測定系の分解能が十分でない (-155 dB , $f \geq 1\text{ kHz}$ での平均値)。
- (3) トランジスタ増幅器の等価入力位相雑音を雑音指数だけで表現するには無理がある。

このうち (3) について補足する。トランジスタ高周波増幅器の位相雑音は、雑音指数で表現されるような、入力正弦波信号に重畳した狭帯域の雑音によるほかに、第 3.2 節で述べたような、トランジスタに固有の低周波雑音 ($1/f$ 雑音, 白色雑音を問わない) により、エミッタ電流、ベースコレクタ間障壁容量などのパラメータが変調されることにより生ずる成分が含まれている。しかし、(3.120) 式による $\mathcal{L}(f)$ はこの種の位相雑音発生機構は考慮していない。したがって、実際の $\mathcal{L}(f)$ は (3.126) 式によるものよりも大きくなる筈である。

図 3.48 の“混合器雑音”の場合、(3.123) 式による計算値と実測値が比較的良く合っているのは、混合器の方が増幅器よりも、上述の“パラメータ変調”を受けにくい条件にあるためと考えられる。

何れにしても、 $\mathcal{L}(f)$ 測定系の分解能を改善すること、および混合器、増幅器の雑音指数を実測することが必要である。

測定系の分解能が改善できれば、混合器自身の位相雑音測定には、たとえば、図 3.49 の方法が適当と思う。

3.4.3 結 論

(1) ショットキーバリヤダイオードを使用した 2 重平衡混合器の位相雑音は負帰還をかけた低雑音トランジスタによる増幅器のそれより少ない。

(2) トランジスタ高周波増幅器の位相雑音は単に雑音指数だけでは表現し難い。

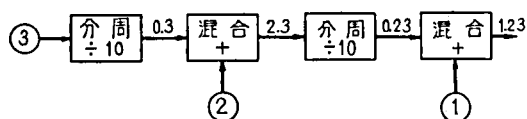


図 3.50 周波数合成の基本的な方法

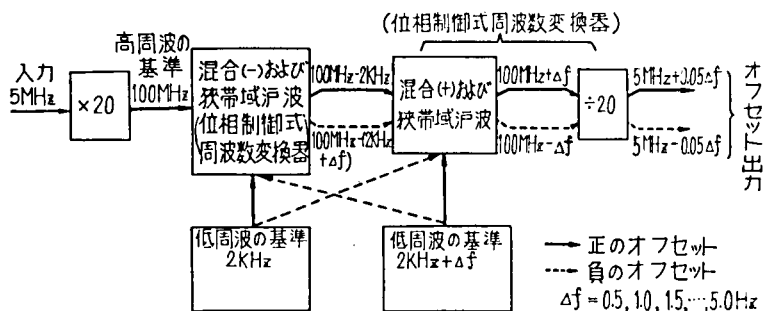


図 3.51 周波数オフセットの原理

- (3) 混合器と増幅器の雑音指数を実測する必要がある。
- (4) 位相雑音測定系の分解能を改善する必要がある。

3.5. 周波数オフセット器^{(17),(48)}

3.5.1 周波数オフセットとその方法

周波数とその公称値からある一定量ずらすことを周波数オフセット、また、その装置を周波数オフセット器（または周波数オフセッタ）と言う。1971 年末まで、世界の大多数の標準電波は、その周波数の積算値（時刻）が平均太陽時（地球自転時）に近似するよう、周波数オフセットを実施していたので、オフセット器は原子時と平均太陽時の相互変換に多く使用された。1972 年の標準電波の周波数オフセットの世界的廃止以後は、この装置は特殊な周波数合成器として周波数の精密計測その他に利用されている。

周波数オフセットの方法には、(1) 移相器の回転による電気、機械的方法と (2) 電子回路だけによる方法がある。(1) の方法では、移相器の電氣的位相対機械的回転角度特性の非直線性や回転機構の回転むらなどがオフセット器出力信号における周波数変動の原因となる。移相器には従来シンクロレゾルバが多く用いられたが、直交巻線中の電流の位相差と振幅の精密調整法が未確立であったため、位相誤差が大きく、そのうえ使用周波数も高々 100 kHz と低かったので、位相誤差（約 3.5° ）の影響を転減できず、 $0.1 \mu\text{s}$ くらいの精密しか得られなかった。その後 KDD 研究所は 5 MHz くらいまで使える短波帯方向探知器のゴニオメータを使用し、また、精密位相

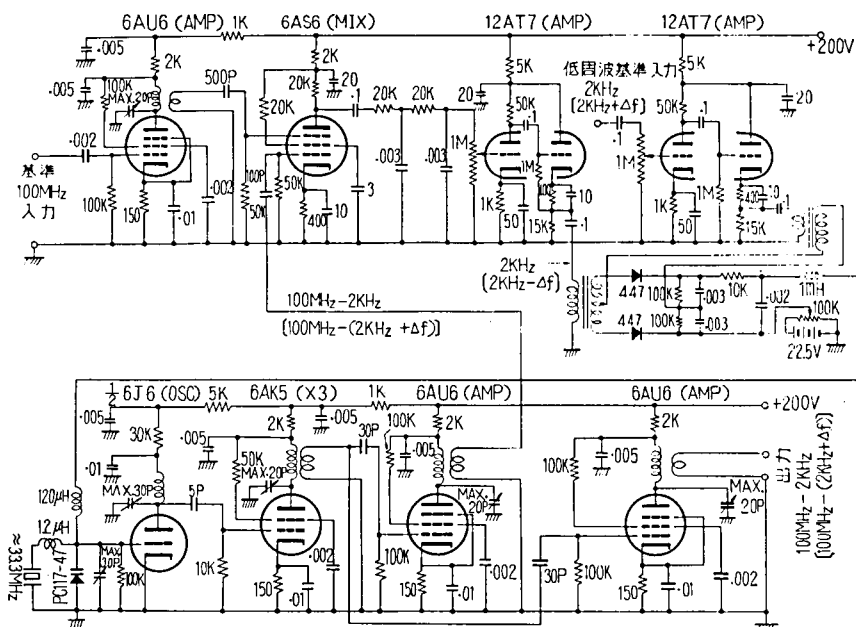


図 3.53 第 1 位相制御式周波数変換器〔 〕内は負のオフセット値の場合を示す

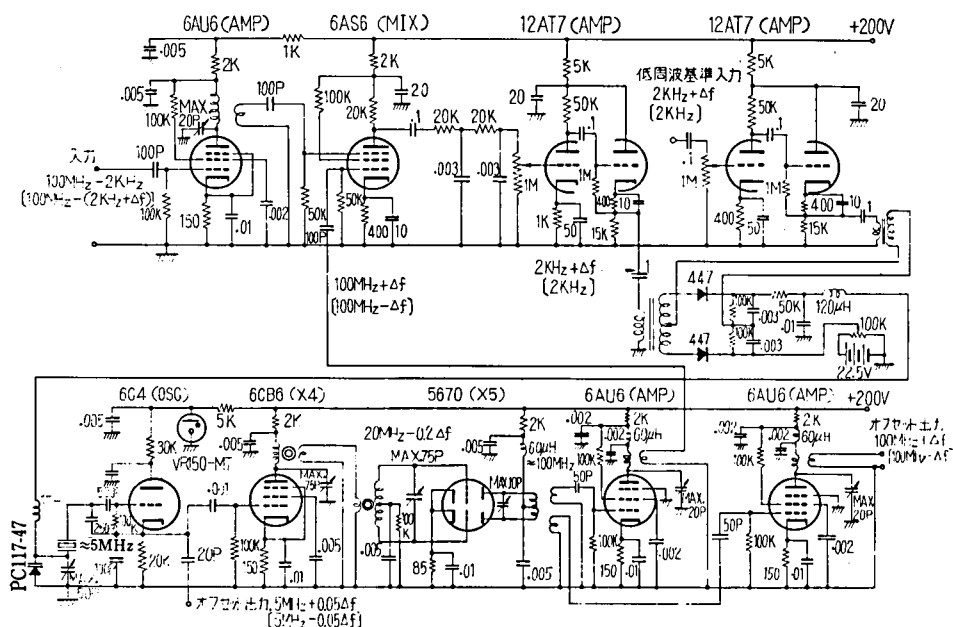


図 3.54 第 2 位相制御式周波数変換器〔 〕内は負のオフセット値の場合を示す

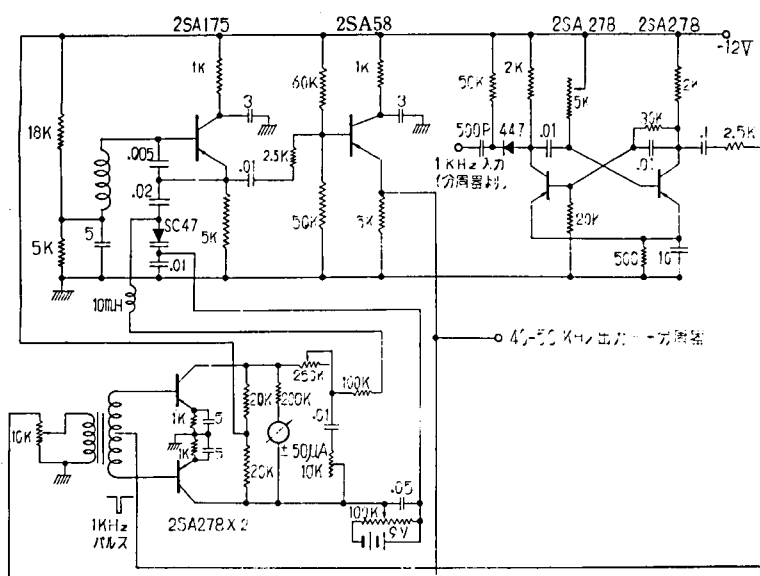


図 3.55 40~50 KHz 位相制御発振器

表 3.7 低周波基準周波数発生器各部の周波数とオフセット値との関係

40~50 kHz 位相制御発振 器周波数 (kHz)	基準周波数 2 kHz+ Δf (kHz)	オフセット値		
		($\times 10^{-10}$)	5 MHz 出力 (Hz)	100 MHz 出力 (Hz)
40	2,0000	0	0	
41	2,0005	± 50	± 0.025	± 0.5
42	2,0010	± 100	± 0.050	± 1.0
43	2,0015	± 150	± 0.075	± 1.5
44	2,0020	± 200	± 0.100	± 2.0
45	2,0025	± 250	± 0.125	± 2.5
46	2,0030	± 300	± 0.150	± 3.0
47	2,0035	± 350	± 0.175	± 3.5
48	2,0040	± 400	± 0.200	± 4.0
49	2,0045	± 450	± 0.225	± 4.5
50	2,0050	± 500	± 0.250	± 5.0

のオフセット (50×10^{-10} ステップで $0 \sim \pm 500 \times 10^{-10}$) を行うこととし、オフセット値の連続的変化の方法についても考慮した^{(17),(48),(47)}。周波数オフセットは、一般の周波数合成器が採用しているように、混合 (+) と分周 ($\div 10$) という基本操作の繰り返し (図 3.50) で行えるが、試作器では、オフセット器に適したより簡単な図 3.51 の方法を用いた。すなわち、入力基準信号 5 MHz を通倍した 100 MHz を高周波の基準信号とし、これに低周波の 2 つの基準信号 (これら 2 つの周波数差が所望のオフセット値に対応する) を 2 段の位相同期ループ (PLL) を用

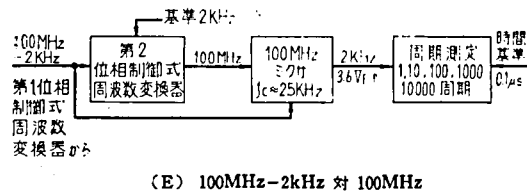
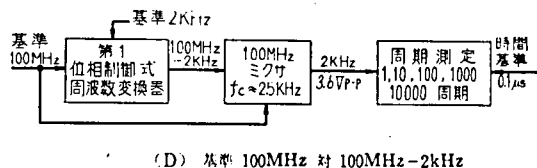
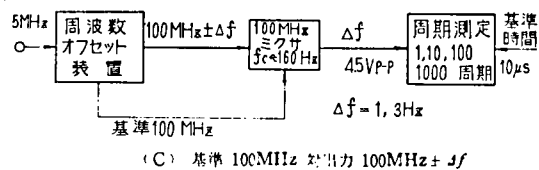
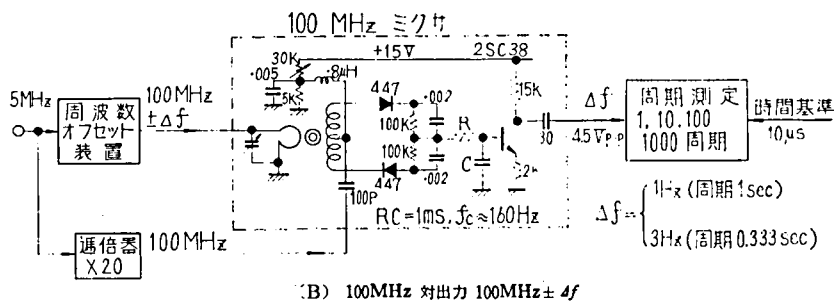
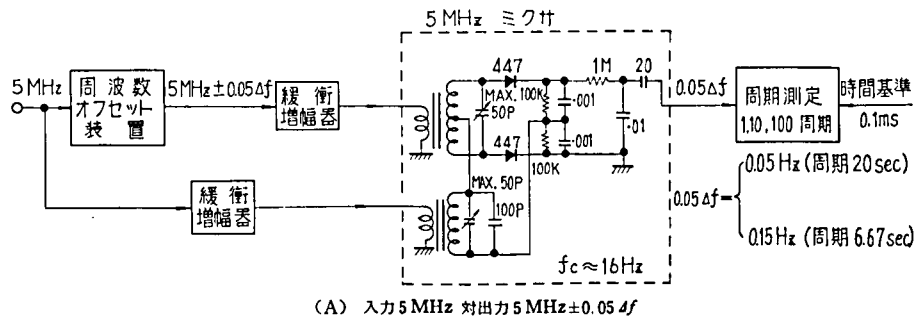


図 3.56 オフセット装置および各部の周波数安定度の測定方法

いて順次に混合して周波数の加減算を行い、目的のオフセット値を得る。

3.5.2 試作装置

試作オフセット器は図 3.52 に示すように、5 → 100 MHz 通倍器、2 段の PLL 式周波数変換

器、およびオフセット値をきめるための低周波基準信号発生器で構成されている。この構成により、周波数の演算

$$\left. \begin{array}{l} (100 \text{ MHz} - 2 \text{ kHz}) + (2 \text{ kHz} + \Delta f \text{ Hz}) = 100 \text{ MHz} + \Delta f \text{ Hz} \\ \text{または} \\ [100 \text{ MHz} - (2 \text{ kHz} + \Delta f \text{ Hz})] + 2 \text{ kHz} = 100 \text{ MHz} - \Delta f \text{ Hz} \end{array} \right\} \quad (3.127)$$

が行われる。ただし

$$\Delta f = 0.5, 1.0, 1.5, \dots, 5.0 \text{ Hz}$$

である。(3.127)式の信号および第2位相同期式周波数変換器からの $5 \text{ MHz} + 0.05 \Delta f \text{ Hz}$ (または $5 \text{ MHz} - 0.05 \Delta f \text{ Hz}$) がこのオフセット器の出力信号である。すなわち、この装置の出力信号は次の2つである。

$$\left. \begin{array}{l} 100(1 \pm 10^{-8} \Delta) \text{ MHz} \\ 5(1 \pm 10^{-8} \Delta) \text{ MHz}, \\ \Delta = 0.5, 1.0, 1.5, \dots, 5.0 \end{array} \right\} \quad (3.128)$$

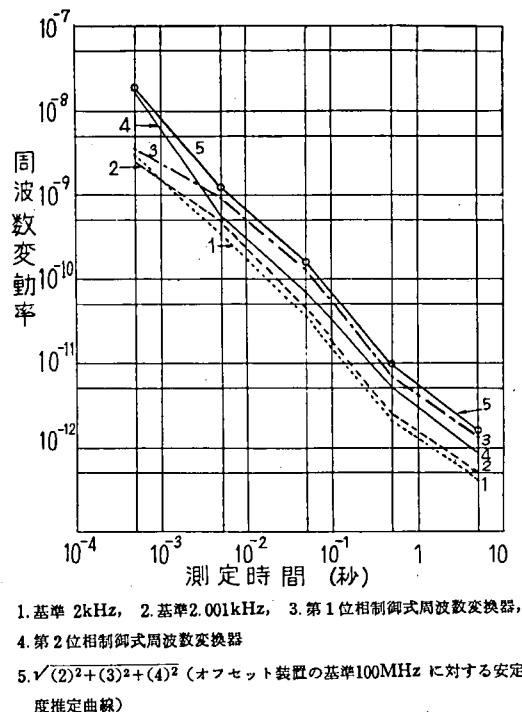
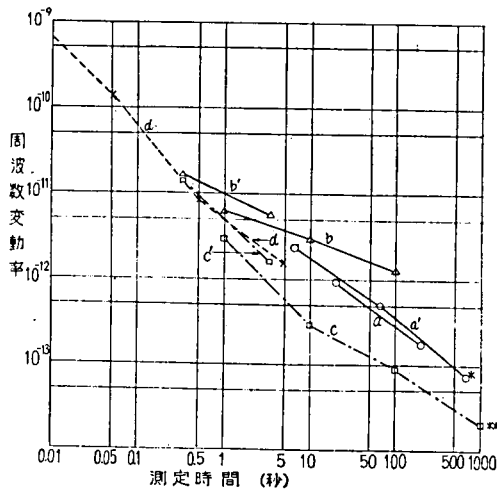


図 3.57 低周波基準周波数および位相制御式周波数変換器の周波数安定度



- a 5 MHz 入力対 5 MHz+0.05 Hz (測定法図3.56(A))
 a' 5 MHz 入力対 5 MHz+0.15 Hz (")
 b 100MHz 対 100MHz+1 Hz (測定法図3.56(B))
 b' 100MHz 対 100MHz+3 Hz (")
 c 基準 100MHz 対 100MHz+1 Hz (測定法図3.56(C))
 c' 基準 100MHz 対 100MHz+3 Hz (")
 d 図3.57曲線5に同じ

* データ数46, ** データ数36

図 3.58 周波数オフセット装置の周波数安定度

図 3.52 の 5 → 100 MHz 通倍器は第 3.3 節の図 3.31 および 3.32 に示したものとほとんど同じである。また、第 1 および第 2 位相同期式周波数変換器の回路図を図 3.53 および図 3.54 に示す。また、図 3.52 の低周波基準周波数発生器のうち、40～50 kHz 位相同期発振器の回路構成を図 3.55 に示す。正弦波自励発振器 (2SA175, 2SA58) 出力と基準の 1 kHz パルスの所望の高調波とで位相差検出を行い、その直流出力を発振器の可変容量ダイオード (SC47) に加えて位相制御を行う。したがって、この発振器は 40～50 kHz の範囲で 1 kHz ごとの基準信号を発生する。この信号を図 3.50 に示した方式の周波数合成器に加えて低周波基準の $2 \text{ kHz} + \Delta f \text{ Hz}$ を得る。40～50 kHz 位相同期発振器の周波数とこれに対応する $2 \text{ kHz} + \Delta f \text{ Hz}$ およびオフセット値を表 3.7 に示す。

3.5.3 実験とその結果

オフセット器の周波数安定度およびこれに影響をおよぼす各部の安定度の測定には周期測定法を用いた。被測定信号の周波数 f を基準信号の周波数 f_0 と混合し、低周波のビート周波数 $f_B = f - f_0$ を得、これをカウンタで周期測定し、第 2.2 節で用いた方法により周波数安定度を求める。測定法を一括して図 3.56 (A)～(E) に示す。

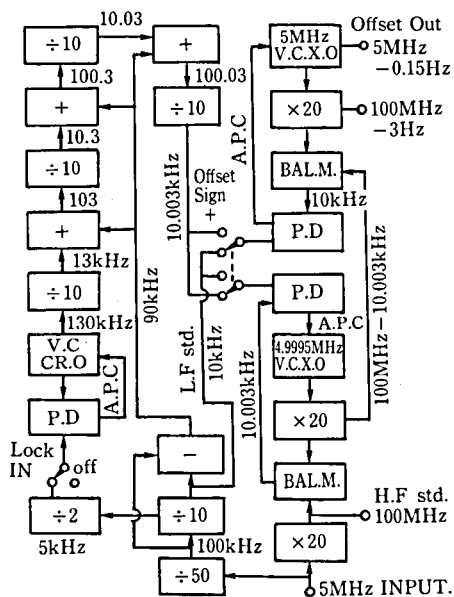


図 3.59 周波数オフセット実用化装置

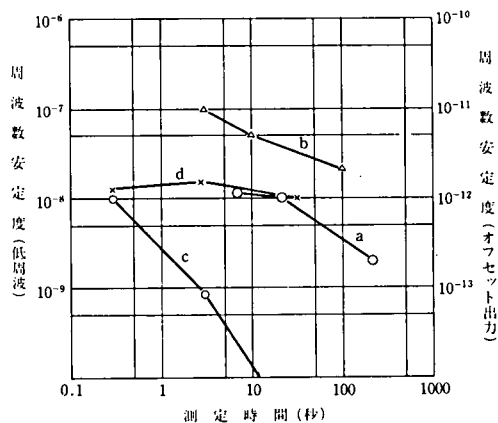


図 3.60 実用化装置の周波数安定度



図 3.61 周波数記録計による安定度

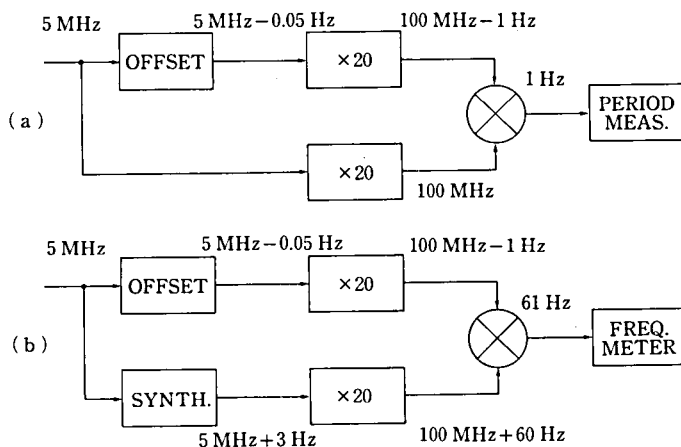


図 3.62 安定度測定法

図 3.57 に基準 2 kHz および 2.001 kHz, 第 1 および第 2 位相同期式周波数変換器などの周波数安定度を示す。基準 2 kHz および 2.001 kHz の安定度はこれらの信号を直接カウンタに入れて測定した。図中折れ線 1 および 2 はその結果をオフセット器としての最終的な安定度に換算して図示してある。折れ線 3 および 4 は第 1 および第 2 位相同期周波数変換器のそれぞれの入力基準信号に対する周波数安定度である(図 3.57 (D) および (E) で測定)。折れ線 3 では基準 2 kHz の安定度が影響するが, 折れ線 4 の場合はこれは相殺される。折れ線 5 は折れ線 2, 3 および 4 の各値の 2 乗和の平方根で, それぞれの安定度が独立と仮定したときのオフセット器の基準 100 MHz

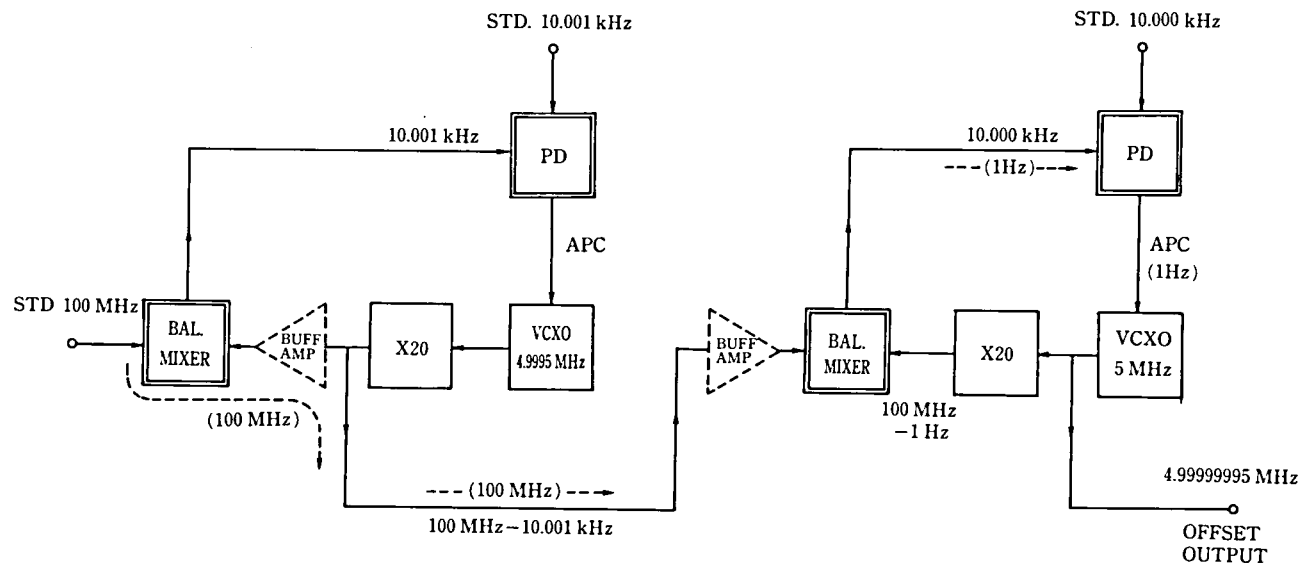


図 3.63 オフセット器出力における FM 変調の防止方法

に対する安定度を示している。

図 3.58 はオフセット器総合の周波数安定度を示す。折線 a および a' はオフセット値がそれぞれ 100×10^{-10} および 300×10^{-10} のとき、基準入力 5 MHz に対する 5 MHz オフセット出力の周波数安定度を示し、この装置の安定度を代表するものである(測定法図 3.56 (A))。折線 b および b' はオフセット値がそれぞれ 100×10^{-10} および 300×10^{-10} の場合のこの装置の 100 MHz 出力の安定度を示す。図 3.56 (B) の測定法から明らかなように、測定に使用した 5~100 MHz 通倍器の位相変動の影響が追加されるため、測定時間 10 秒以上では折線 a および a' に比較してかなり安定度が悪い。折線 c および c' は上記と同様のオフセット出力、すなわち、100 MHz+1 Hz および 100 MHz+3 Hz の基準 100 MHz に対する安定度を示し、図 3.57 の折線 5 に対応するものである(測定法図 3.56 (C))。折線 c と折線 a, a' との間にかかなり大きい安定度の差が見られるが、その原因は 5~100 MHz 通倍器(図 3.52)と測定のための 5 MHz 緩衝増幅器の位相変動と思う。5~100 MHz 通倍器の位相変動は測定時間 10 秒で $10^{-13} \sim 10^{-12}$ くらいと見てよいから、10 秒付近における折線 a, a' と c, および a, a' と b の差は妥当である。一方、測定時間 0.3~0.5 秒で折線 b' と c' が接近していることから、上記の位相変動は主として周囲温度変動によるものと思う。

3.5.4 実用化装置⁽⁴⁸⁾

図 3.59 は上記試作器の実験結果に基づき、安定度と信頼度向上のために製作した半導体化実用化装置の構成を示す。構成上の主な変更点は、図 3.52 の第 1 および第 2 位相同期式周波数変換器出力における不要側帯波の抑圧のために低周波基準信号周波数を 2 kHz 帯から 10 kHz 帯にしたことである。図 3.60 はこのオフセット器出力の基準入力に対する周波数安定度である。図の折線 a は 5 MHz 基準入力に対する 4.99999995 MHz (オフセット値 -100×10^{-10}) および 4.99999985 MHz (オフセット値 -300×10^{-10}) の安定度である。図 3.58 における試作器での結果とはほとんど同じ値を示している。折線 b は図 3.56 (B) の測定法による 100 MHz 帯のオフセット出力の安定度で、図 3.58 よりも若干悪い。また、折線 c は 10 kHz および 10,003 kHz の相互安定度(両者のビートの 3 Hz の周波数変動から求めた)で、試作器に比較し 1 桁以上安定度が改善されたので、折線 a との比較から明らかなようにこれら低周波基準信号の安定度のオフセット器総合の安定度におよぼす影響はほとんど無視できるようになった。図 3.61 は 4.99999995 MHz 出力(オフセット値 -100×10^{-10})の短期安定度を図 3.62 の方法により記録した例で、図 3.60 の折線 b に相当するものである。この記録から明らかなように、100 MHz-1 Hz の出力がオフセット値 -100×10^{-10} に相当した 1 Hz で周波数変調されている。その有力な原因として、図 3.63 に示すように、第 1 位相同期式周波数変換器出力の 100 MHz-10.001 kHz

(オフセット値 -100×10^{-10} の場合)の不要側帯波の 100 MHz が第 2 周波数変換器の平衡混合器に加わり、これと 5 MHz VCXO からの通倍出力 100 MHz -1 Hz とのビートの 1 Hz がこの混合器出力になり、VCXO を周波数変調することが考えられる。したがって、これを防止するには、図 3.63 の第 1 周波変換器の平衡混合器の入力端子間の隔離性を良くすること、および破線で示したように、帯域増幅器を追加すればよい。さらに一般的な問題として、オフセット出力のスペクトル純度を高める(したがって短期安定度を向上させる)には、上記のほかに、増幅器の一方向性と回路間のしやへいを良くすること、接地回路や電源回路を通しての信号間の干渉を極力防止することが必要である。

3.5.5 結 論

(1) 周波数通倍による高周波の基準信号と、分周と混合を基本とした周波数合成による低周波の基準信号とを 2 段の位相同期式周波数変換器に加えることにより、 $\pm 500 \times 10^{-10}$ 周波数オフセットを 50×10^{-10} ステップで安定に行うことができた。

(2) 試作器および半導体化実用化装置のオフセット値の基準入力信号に対する周波数安定度は測定時間により大略次の通りである。

1 秒: 1×10^{-11}

10 秒: $2 \sim 3 \times 10^{-12}$

100 秒: 3×10^{-13}

1000 秒: 1×10^{-13}

(3) 装置の安定度は主として 5~100 MHz 通倍器と位相同期式周波数変調器の安定度に依存するがこのうち 5~100 MHz 通倍器の周囲温度変化による位相変動の影響が大きいと思う。

(4) この装置は原子時と平均太陽時の相互変換のほか、短期安定度の高いことを利用し、水晶発振器および原子周波数標準器の短期および長期安定度の測定、また、簡単な周波数合成器を併用して精度 $10^{-13} \sim 10^{-11}$ の周波数精密調整など、精密計測に広く応用できる。

(5) オフセット器のスペクトル純度、したがって短期周波数安定度の向上には、平衡混合器の平衡度と隔離性の向上、増幅器の一方向性の改善、さらに接地回路や電源回路を通しての信号間の干渉の抑圧が必要である。

100頃欠

第4章 時間および周波数の遠隔比較

4.1 はじめに

第2章では、実験室内での周波数とその安定度の測定を論じた。しかし、標準電波などを受信して二次標準器を校正する場合や、相互に遠隔した2個所で、電波などを仲介として周波数標準や時間の精密比較を行う場合も多い。このような目的に利用される媒体には、JJY, JG2ASのようなMF, HF帯およびLF帯標準電波、同じくLF帯(100 kHz)のロランC, VLF帯の海岸局やオメガ、また、VHF, UHF帯以上では、TV電波(同期信号および色副搬送波)、放送・通信衛星、GPS(世界測位システム)で代表される測位・航行衛星などがあり、さらに最近では、VLBI(超長基線電波干渉計)もある。なお、極めて特殊な例であるが、原子時計の運搬による方法もある。上記のうち、ロランC, オメガ, GPSなどは、システムの運用上、それ自体精密な時刻同期(時間合わせ)が必要である。

これらの利用で、信号の伝送方向に注目すると(1)一方向伝送(2)双方向伝送の2方式に大別される。

(1)は一般利用者が標準電波を受信して、時計や周波数標準を校正したり、船舶、航空機などが航行衛星の信号を受信して位置決定を行う場合である。この場合、校正精度や位置決定精度は電波伝搬時間とその変動に直接影響される。これに関連して、衛星の軌道決定精度も重要な要素となる。送信および受信系における信号遅延時間も精度に直接影響する。

また、一方向伝送の中には、同一の送信信号を2か所以上で同時測定し、その結果を相互比較する方法もある。同一の信号を仲介とするので、時計比較精度は電波伝搬時間差および受信系の遅延時間差だけに影響されるので、一般的な方法ではないが、通常の一方向伝送よりも高精度が得られる。図4.1はこの方法の一例で、電波研究所が、1977年以来、標準電波(JJYとJG2AS)の無人化送信所のセシウム原子時計の時刻と周波数の遠隔監視、制御をTV水平同期信号を仲介として行っている方法である⁽⁴⁹⁾。研究所と送信所の双方で、それぞれのセシウム原子時計により、東京の特定のTV局の特定の水平同期パルスの受信時刻を、1日数回、定時に測定する。送信所の測定値は通信回線で研究所に伝送され、ここで計算処理される。この方法での時計比較精度は1 ns、1日平均周波数の比較精度は 10^{-14} の桁である。TV局信号仲介によるこの方法は、十数年来、電波研究所、東京天文台、計量研究所などの専門機関で、原子時計の相互比較に使われている⁽⁵⁰⁾。

(2)の双方向伝送方式は、時計比較を行おうとする2局で送受信機を設備し、通信衛星を中継

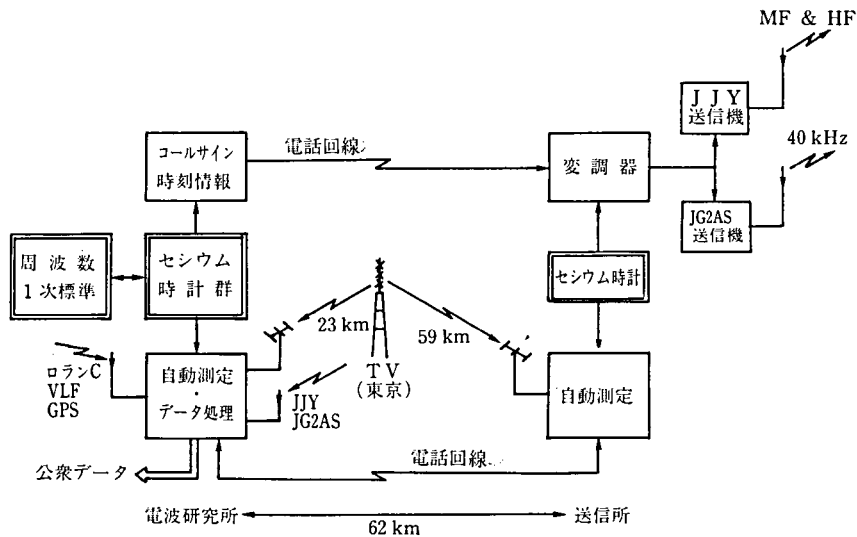


図 4.1 TV 信号の仲介による標準電波無人化送信所の監視制御

器として、時刻信号の交換を行う場合がこれに該当する。この方式では、電波伝搬路はほとんど同一であるから、伝搬時間差は極めて小さい。したがって、時間比較誤差の要因は送受信系での信号遅延時間差だけになるので、比較精度は一方向方式に比べて遙かに高くなる。

時刻と周波数標準の供給および相互比較のための上記の媒体をその地域的範囲、概略の正確

表 4.1 時刻と周波数の供給・比較方法（現状）

方 法		利用可能地域	正 確 さ		備 考
			時 刻	周 波 数	
標準電波	MF, HF	半 球	~1 ms	$10^{-8} \sim 10^{-7}$	
	LF	地域的	~0.1 ms*	$\sim 1 \times 10^{-11}/d$ (位相比較)	*エンベロープ利用
VLF		全世界	$1 \sim 10 \mu s$	$\sim 1 \times 10^{-11}/d$	
ロランC		~2,000 km*	$1 \mu s$	$\sim 1 \times 10^{-12}/d$	*地表波利用
時計運搬		任 意*	$0.2 \mu s$	$\sim 1 \times 10^{-12}/d$	*回数、経済性に問題
衛 星	周 回 (時計搭載)	全世界	$0.1 \sim 50 \mu s$	$\frac{1 \times 10^{-12}}{d}$ $\sim 1 \times 10^{-10}/d$	*GPS では 10 ns の可能性
	静 止 (双方向)	半 球	10~50 ns	$\sim 1 \times 10^{-13}/d$	将来数 10 ps の可能性
VLBI		半 球	~10 ns*	$\sim 1 \times 10^{-13}/d$	*0.1 ns 実現中

さなどについて、現状で比較すると表 4.1 のようになる⁽⁵¹⁾。本章では、これらのうち、周波数安定化された VLF 海岸局を仲介とした比較方法および航行技術衛星と通信衛星を利用した比較方法につき述べる。

4.2 VLF 電波による比較

1955 年、J.A. Pierce が大西洋横断の VLF (16 kHz) 伝搬実験で、伝搬の遠達性はもとより、短波に比べて 2 桁も高い位相安定性を実証して以来⁽⁵²⁾、VLF は大陸間規模の高精度時刻・周波数比較に利用され、歴表時 (ET) によるセシウム原子の遷移周波数の決定を始めとして、1960 年代後半まで、国際原子時 (TAI) 決定のための主要手段となった。

VLF の地上波は、地表面の損失が少ないため、短波とは異なり遠達性がある。また電離層伝搬波は電波が主として D 層下部で反射するため、伝搬中の減衰が比較的少く、その伝搬は時間的に極めて安定で、電離層じょう乱の影響も少なく、フェージングも緩かであり、位相の安定性も非常に高い。したがって、時刻や周波数の遠隔精密比較には当時最適の媒体であった⁽⁵³⁾。電波研究所 (RRL) は、原子周波数の国際比較のために、1963 年以来、米国海軍の海岸局 NPM (19.8 kHz, Hawaii) の受信を手始めに⁽⁵⁴⁾、同種の海岸局 NPG/NLK 局 (24 kHz, 18.6 kHz, Jim Creek, Wash.), NSS 局 (21.4 kHz, Annapolis, Md.) などの受信、位相測定を定常的に行った^{(55),(56)}。この節では、これらのうち、最も長期間継続された NLK 局 (18.6 kHz) を仲介とする原子時計の米国海軍天文台 (USNO) との国際比較とその結果につき述べる⁽²¹⁾。

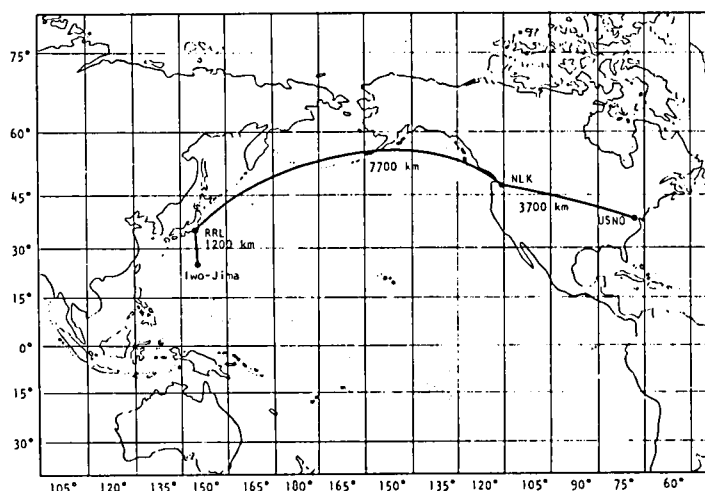


図 4.2 NLK 送信所と兩受信機関の配置

表 4.2(a) NLK 送信局と受信機関

送信局 受信機関	位 置	伝搬距離	送信周波数 送信電力
NLK	Jim Creek, Wash., USA 48°12'N, 121°55'W	—	18.6 kHz 250 kW
RRL (電波研)	Koganei, Tokyo, Japan 35°42'N, 139°30'E	7,700 km	—
USNO (米国海軍天文台)	Washington D.C., USA 38°50'N, 77°05'W	3,700 km	—

表 4.2(b) 電波研の受信系規格

受 信 機			ア ン テ ナ
型 名	短期, 長期安定度	感 度	
TRACOR 社 599 型 VLF 位相追尾受信機	$\leq 0.25 \mu\text{s}$	$0.01 \mu\text{V}$	ループアンテナ 一辺 1.6 m 実効高 約 2 cm

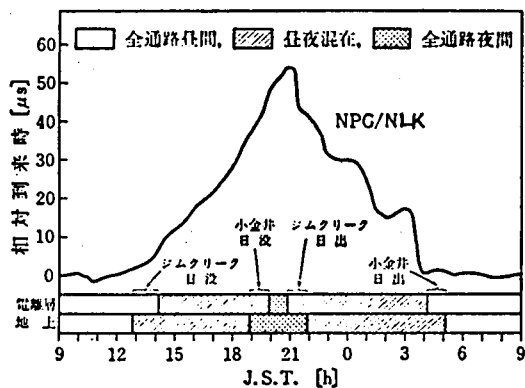


図 4.3 NPG/NLK の位相日周変化 (5.11-5.12, 1971)

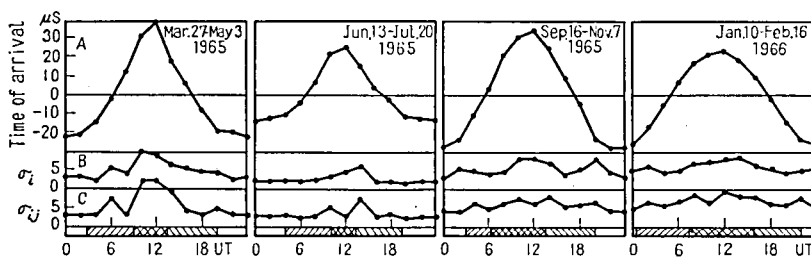


図 4.4 NPG/NLK の各季節における平均日周位相変化と標準偏差

図 4.2 は NLK 局, RRL, USNO の所在と伝搬通路を, また, 表 4.2 (a), (b) は, これらの詳細と RRL の受信系の規格を示している。このような遠距離伝搬では, 空間波は多数回反射して, これと地表面に沿う回折波とが干渉し, 電界強度も位相も複雑になるが, 電離層と地球表面とで形成される導波管内の伝搬として理論的に取り扱われている⁽⁵⁷⁾。

図 4.3 は東京小金井で受信した NLK の日周位相変化の一例である⁽⁵⁵⁾。送受信点がともに昼間の状態では位相遅延は最も小さく, その変動も非常に小さいが, 送信点日没ごろから受信点日没にかけて伝搬通路が次第に夜間の状態に移行するため, 到来波の位相遅延も徐々に大となり, 全通路が夜間の状態では, 位相遅延は最も大きくなる。また, 図 4.4 は, このような日周変化の季節変化を示す。このような変化は太陽天頂角の変化とほぼ対応する。図の折線 A は, この日周変化の季節ごとの平均値, B の σ_i は時刻 i における日周位相変化(相対到来時*)の標準偏差, C の σ_{ij} は時刻 i での相対到来時と, それから 24 時間後の相対到来時との差の標準偏差をそれぞれ示す。したがって, $\sigma_{ij}/86400$ は, 時刻 i についての 24 時間平均周波数の変動の標準偏差, すなわち比較精度を表すことになる。これを昼夜について季節ごとにまとめたものが表 4.3 である。表から, 比較精度は夏季の昼間が最も良いことが分る。

表 4.3 NLK 仲介による周波数比較精度

	周波数比較精度 [10 ⁻¹¹]			
	春	夏	秋	冬
昼 間	± 4	±3	±5	±7
夜 間	±11	±6	±8	±9

相対到来時は, 位相追尾受信機により連続記録されるが, 周波数の国際比較のための測定時刻は, 全伝搬通路が昼間の時刻を選ぶ。このようにして得られた, 平均化時間 24 時間の到来波の周波数値は, 図 4.3 や 4.4 のような位相日変化の影響を直接受けないことになる。

図 4.5 は, RRL および USNO における NLK 電波の相対到来時の長期間記録と, これから求めた, 両者間の国際時刻比較の結果である。同図 (a) および (b) は, それぞれ RRL および USNO における NLK 電波の日々の相対位相値 (相対到来時), UTC(RRL)—NLK および UTC(USNO)—NLK, のプロットである。ここで, 相対位相値が正のとき, 受信局の原子時計の方が NLK 電波の到来時よりも位相が進んでいることになる。図の (a) と (b) から明らかなように, 昼間の相対到来時にも季節変化がある。主として伝搬通路長の相違のためか季節変化の振幅は

* 到来時は受信電波の, 原子時計を基準とした, 位相を時間の単位(通常 μs)で表したものである。使用した位相追尾型受信機は, 受信波の周波数に関係なく, μs で到来時を指示する。到来時の絶対値が分らないために相対到来時または到来位相値と言う。

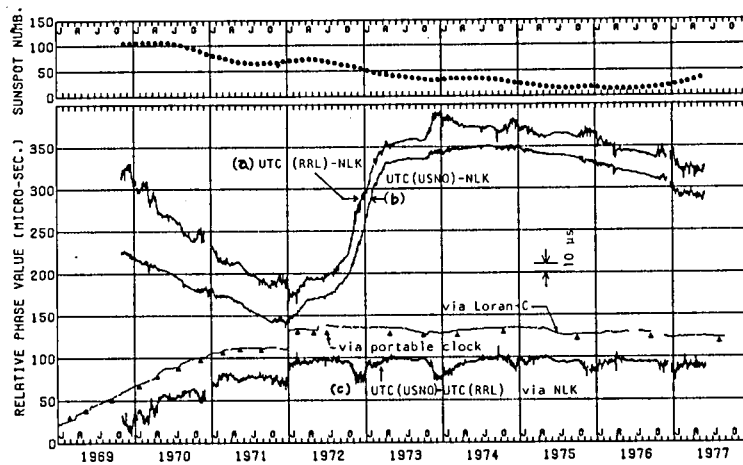


図 4.5 NLK を仲介とした日米間時刻比較

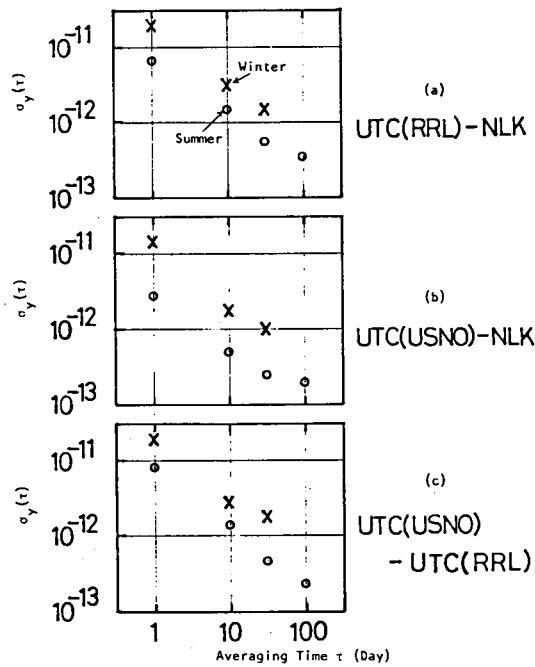


図 4.6 NLK 仲介による周波数比較の安定度

- (a) RRL 対 NLK
- (b) USNO 対 NLK
- (c) USNO 対 RRL

(a)の方が(b)よりも大きい。(a)および(b)における日々の到来時からそれぞれの長期傾向を除いたデータから、2 標本標準偏差 $\sigma_y(\tau)$ を計算した結果を夏季と冬季について図 4.6 (a) および (b) に示す。また、図 4.5 の (a) と (b) の日々の相対到来時の差を求めると

$$\begin{aligned} & [\text{UTC (USNO)} - \text{NLK}] - [\text{UTC (RRL)} - \text{NLK}] \\ & = \text{UTC (USNO)} - \text{UTC (RRL)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

から明らかなように、NLK 局送信電波の周波数・位相変動の影響は除去され、NLK を仲介とした、両所間の相対時刻差が分る。図 4.6(c) は、この時刻差から求めた $\sigma_y(\tau)$ である。この場合の $\sigma_y(\tau)$ の τ に対する傾斜はほぼ $1/\tau$ である（フリッカ位相または白色位相雑音に対応する）。この図から、とくに夏季における両者間の周波数比較精度を各平均化時間について表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_y(1 \text{ day}) &\approx 1 \times 10^{-11}, \quad \sigma_y(10 \text{ days}) \approx 1 \times 10^{-12} \\ \sigma_y(30 \text{ days}) &\approx 6 \times 10^{-13}, \quad \sigma_y(100 \text{ days}) \approx 2 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

次に、上記と比較のために、ロラン C 電波を仲介とした USNO と RRL 間の時刻差を 10 日ごとにプロットして図 4.5(c) に示す。時刻差の絶対値は可搬形セシウム原子時計の運搬で決めている。

図 4.7 は、NLK 仲介の時刻差、 $\text{UTC (USNO)} - \text{UTC (RRL)}$ の夏至を中心にして 90 日間の平均値を、これに丁度対応するロラン C 仲介の時刻差を基準にして示したものである。1970 年から 1977 年までの全期間を通じてのこれらの相対値のばらつきは $10 \mu\text{s}$ （標準偏差）にもなるが、古い自作受信機を表 4.2 の商用受信機に取り換えた、1972 年以後の期間ではばらつきは $2 \mu\text{s}$ に過ぎない。

以上、中緯度以下の伝搬による、NLK 局を仲介とした日米両機関の原子時計の周波数と時刻比較につき述べた。夏季における周波数比較の精度は 2 標本標準偏差で表した場合、平均化時間 1 日、10 日、30 および 100 日で、それぞれおよそ 1×10^{-11} 、 1×10^{-12} 、 6×10^{-13} および 2×10^{-13} である。時刻比較については、夏季の 90 日間平均の日米両機関の時刻差の変動は、対応するロラン C による時刻差に対しおよそ $2 \mu\text{s}$ （1972～1977 年）であった⁽²¹⁾。

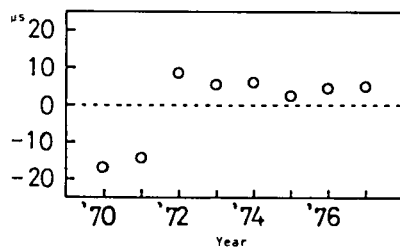
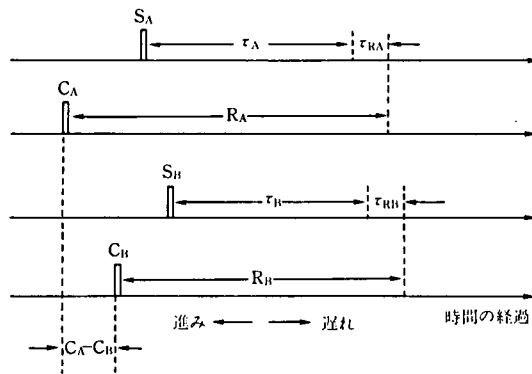
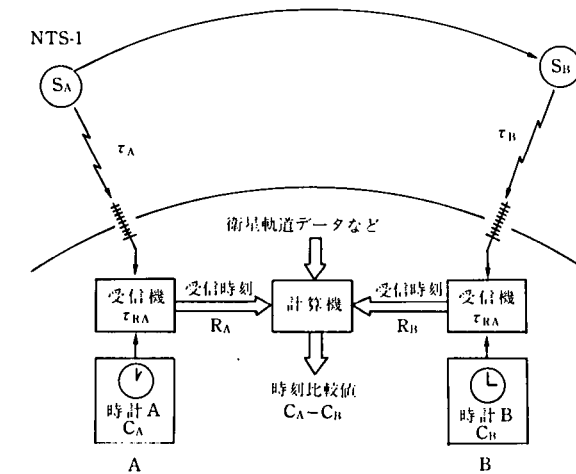


図 4.7 NLK による日米時刻比較精度（ロラン C による比較値を基準）



$$C_A - C_B = (R_A - R_B) - (\tau_A - \tau_B) - (\tau_{RA} - \tau_{RB}) - (S_A - S_B)$$

図 4.8 NTS-1 による時刻比較の原理

4.3 人工衛星による比較

人工衛星による最初の精密時刻比較実験は、1962 年 8 月、実験通信衛星テルスター（周回衛星）を用いて英、米両国間で実施された⁽⁵⁸⁾。それ以後、静止衛星の利用を初めとし、衛星および搭載機器の性能改善、信号伝送技術の進歩などにより、時刻・周波数比較の精密度の向上（不規則誤差の減少）、また、電波伝搬、衛星軌道など、比較測定に付随する物理現象の解明などにより、比較確度の向上（系統誤差の減少）が可能となり、現在、衛星は精密時刻・周波数比較の分野でも主役の座を占める至っている。表 4.4 は、電波研究所が実施または参加した衛星実験の要約である。本節では、これらのうち、比較的最近の成果として、航行技術衛星 1 号（NTS-

表 4.4 衛星による時刻・周波数比較実験 (RRL 関係)

実施時期	実施機関	衛 星	伝送技術	精 密 さ
1965	USNO RRL	Relay II (周回) ⁽⁵⁹⁾ 1.7 GHz (上り) 4.2 GHz (下り)	双 方 向	0.1 μ s
1975	RRL NASA USNO	ATS-1 (静止) ⁽⁶⁰⁾ 6 GHz (上り) 4 GHz (下り)	双 方 向 周波数拡散	1 ns 10 ns (正確さ)
1978~1979	NRL NRLM USNO	NTS-1 (周回) ⁽²²⁾ 335 MHz	1 方 向 時 計 搭 載	$\leq 1 \mu$ s (正確さ)
1979~1980	RRL	BS (静止) ⁽²³⁾ 14 GHz (上り) 12 GHz (下り)	1 方 向 T V 信 号	時刻 $\pm 0.5 \mu$ s 周波数 $\pm 1 \times 10^{-11}$ (何れも正確さ)
1982~	RRL	CS (静止) ⁽²⁴⁾ 30 GHz (上り) 20 GHz (下り)	双 方 向 周波数拡散	≤ 0.5 ns 1~8 ns (正確さ)

1) および実験用中型通信衛星 (CS) による実験とそれらの結果につき述べる。

4.3.1 航行技術衛星 (NTS-1)

米国海軍は、海軍航行衛星システム (NNSS) という現用の衛星航法システムの運用開始後、次の段階として TIMATION 1 号を 1967 年に打ち上げた。NTS-1 は 1974 年、TIMATION シリーズの 3 番目の衛星として打ち上げられたが、これらの衛星は、世界測位システム (GPS) の一つ前の段階の衛星として位置付けられる。NTS-1 の諸特性を表 4.5 に示す。

実験は 1978 年 10 月から約 1 年間、海軍研究所 (NRL) 開発の NTS 時刻比較受信機 (335 MHz のみ受信可能) を使用して、工業技術院計量研究所 (NRLM) と共同で実施された。図 4.8 は、この実験における時刻比較 (衛星搭載時計信号の一方方向伝送による比較) の原理を示す。

いま、地点 (機関) A, B における時計 A, B の時刻比較精度 (正確度と精密度) に関連する諸要素とこれらの記号を表 4.6 のようにすると、両時計の時刻差は図 4.8 を用いて次式で示される。

$$C_A - C_B = (R_A - R_B) - (\tau_A - \tau_B) - (\tau_{RA} - \tau_{RB}) - (S_A - S_B) \quad (4.2)$$

ここで、 $C_A - C_B > 0$ は時計 A の時計 B に対する進みを表している。(4.2) 式の各項に対応する時刻比較の誤差要因は次のようになる。

(1) 電波伝搬遅延時間差 ($\tau_A - \tau_B$)

衛星から A, B 2 地点への電波伝搬遅延時間 τ_A , τ_B は、衛星軌道予測値から計算で求められる。したがって、これらの正確さは軌道決定精度に依存する。また、 τ_A , τ_B には、電離層遅延による誤差も含まれるので、この補正も必要である。電離層遅延は搬送周波数の自乗に逆

表 4.5 NTS-1 の特性

打 上 げ	1974. 7. 14
高 度	約 14,000 km
軌道傾斜角	125°
離 心 率	0.007
周 期	約 8 時間
重 量	約 300 kg
電 力	100 w
周 波 数	335 MHz 及び 1,580 MHz
搭 載 時 計	水晶及びルビジウム
周波数安定度	5×10^{-12} 及び $5 \sim 10 \times 10^{-13}$

表 4.6 時刻比較精度に関連の諸要素

地 点 (機関)	時計信号生起時刻		遅 延 時 間		衛星搭載時計 受 信 時 刻
	比較対象時計	衛星搭載時計 (送信時刻)	電波伝搬	受 信 系	
A	C_A	S_A	τ_A	τ_{RA}	R_A
B	C_B	S_B	τ_B	τ_{RB}	R_B

比例する。そこで、NTS-1 でも、335 MHz のほかに 1580 MHz の搬送波を用い、この 2 波で常時電離層遅延量を実測し、これを補正している。実験に使用した受信機は、前述のように、335 MHz 1 波用の受信機であるため、データ処理の際、両受信地点での電離層遅延を推定して補正を行った。

(2) 受信系遅延時間差 ($\tau_{RA} - \tau_{RB}$)

この測定精度は時刻比較値の正確さに影響する。この実験では、受信機での遅延は、較正用の擬似信号を用いて実測し、アンテナについては、アンテナ、受信機間の同軸ケーブルの遅延を実測した。

(3) 衛星搭載時計の送信時刻差 ($S_A - S_B$)

これは搭載時計のレート(周波数)の正確度と周波数安定度が関係する。前者は系統誤差に、後者は不規則誤差になる。言うまでもなく、送信時刻差は両他点での受信、測定の時間間隔に比例するので、この間隔が大きいほど誤差は大きくなる。第 4.1 節で述べたような同時受信(同時測定)の場合、この種の誤差は無くなり、両他点が近接の場合、(1)の電波伝搬遅延差も小さくなり、時刻比較精度は高くなる。

(4) 受信時刻 (R_A, R_B) 測定の安定度

衛星からの信号受信の SN 比ではほぼ決まる。これは不規則誤差となるが、その値は大体数十

nsである。

この実験は、NRLがイニシアティブを取り、我が国の両機関のほか、USNO、フランス、イギリスなどの専門機関も参加した、国際時刻比較実験である。NRLは、それ自身も含めて、各機関からの衛星時計信号の受信値（受信時刻）を国際データ回線で収集し、これらを衛星軌道データなどを用いて処理した結果を各機関とUSNOとの時刻差UTC (USNO)-UTC (i)の形で発表した（iは各機関を表す）。

図4.9は、このようにして得られた時刻差UTC (USNO)-UTC (RRL)の4か月間のプロットである。図にはセシウム原子時計運搬法による時刻比較値も示してある。同図(a)は時刻差の生データで、これらに直線を当てはめた場合の標準偏差は $0.53\mu\text{s}$ である。図の(b)は前述の電離層遅延を補正した結果である。電離層遅延は伝搬路上の全電子数で決まる。ここでは、任意の地点での全電子数の日周変化の月平均値を、地方時の関数として、昼間は正の余弦関数で、夜間は常数項で近似した、“Bentモデル”を使い、RRLとNRLの両受信点で適用すべき電離層遅延の補正值を計算し、これで(a)の生データを補正している⁽⁶¹⁾。これにより、時刻差の標準偏差は $0.34\mu\text{s}$ と生データの場合の60%に減少すると共に、時計運搬法による比較値との一致度も改善された。図(a)および(b)の右下りの直線的傾向はRRLとUSNOの原子時計のレート差（周波数差）—RRLの方がUSNOより約 2×10^{-13} だけ高い—によるものである。

また、約1年間の実験により、NTS-1によるRRLとUSNOの時刻差と時計運搬法によるそれとの差は約 $0.5\mu\text{s}$ 以下であり、時計運搬法の正確度約 $0.2\mu\text{s}$ を考慮しても、この方法の正確

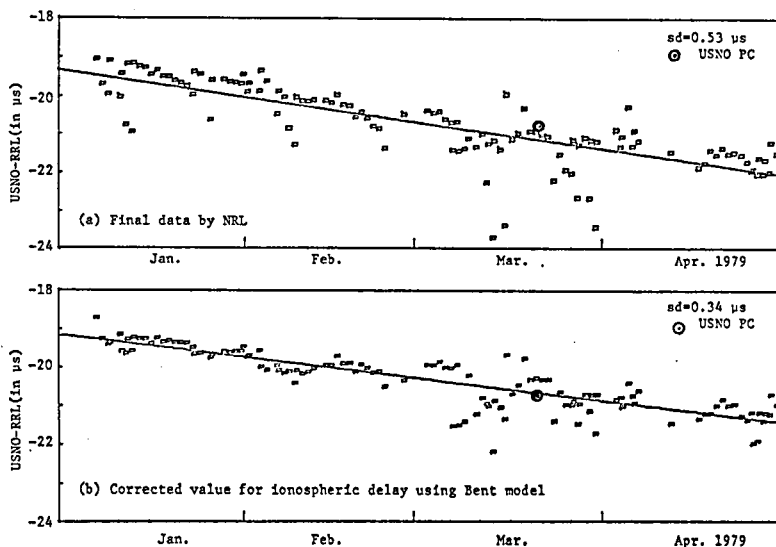


図4.9 NTS-1による日米間時刻比較

度は約 $1\ \mu\text{s}$ あるいはそれより良いことが分る。

なお、図 4.10 は NTS-1 仲介の電波研と計量研との“同時受信法”による時刻差である⁽⁶²⁾。当然ではあるが、時刻差の標準偏差は $55\ \text{ns}$ と非常に小さく、前述したように、ほぼ受信系の安定度を示していると言える。

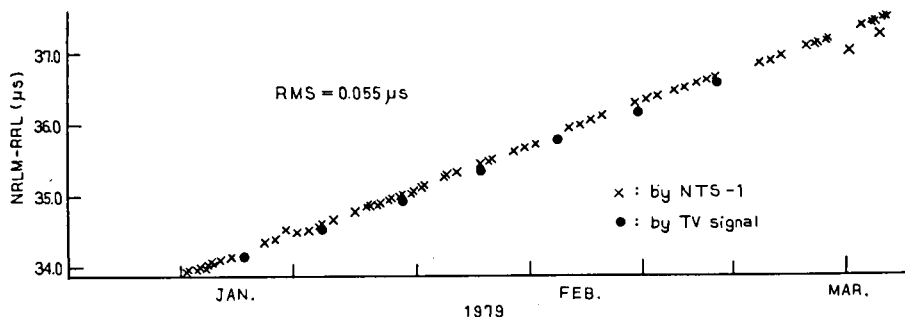


図 4.10 NTS-1 仲介による国内時刻比較

4.3.2 実験用通信衛星 (CS)⁽²⁴⁾

ここでは、前述の双方向伝送方式の例として、実験用通信衛星 CS 中継による時刻比較実験につき述べる。

図 4.11 はこの方式の原理を示す。時計 1 および 2 側の時計時刻、送受信系遅延などを表 4.7 のように表すと、時計の時刻差 $C_1 - C_2$ (C_1 の C_2 に対する進み) は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \Delta C &\equiv C_1 - C_2 \\ &= \frac{1}{2} \{ (R_1 - R_2) + (\tau_{12} - \tau_{21}) + [(U_1 - D_1) - (U_2 - D_2)] \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

この式で、 $R_1 - R_2$ は受信時刻差、すなわち両側の時間測定器の指示の差である。この項は時刻比較の精密度に関連するが、正確度に関係するのは残りの電波伝搬遅延差 ($\tau_{12} - \tau_{21}$) と両側における送受信系間遅延差の相違、すなわち、 $[(U_1 - D_1) - (U_2 - D_2)]$ の 2 項である。

まず、($\tau_{12} - \tau_{21}$) について考えると、時計 1 → 時計 2 および 時計 2 → 時計 1 の電波伝搬通路はほぼ等しいので、 $\tau_{12} - \tau_{21} \approx 0$ になるが、上り回線 (地上 → 衛星) と下り回線 (衛星 → 地上) の周波数が異なるため、電離層遅延に差が生じ、 $\tau_{12} - \tau_{21}$ はゼロにはならない。電離層遅延は、前述のように、伝搬通路上の全電子数に比例し、搬送周波数の自乗に逆比例するので、低い周波数ほど大きくなる。実験用通信衛星 CS の上りおよび下り回線の搬送周波数は、それぞれ $30\ \text{GHz}$ および $20\ \text{GHz}$ であるため、電離層遅延差は最大 $0.2\ \text{ns}$ くらいであり、ほとんど無視できる。

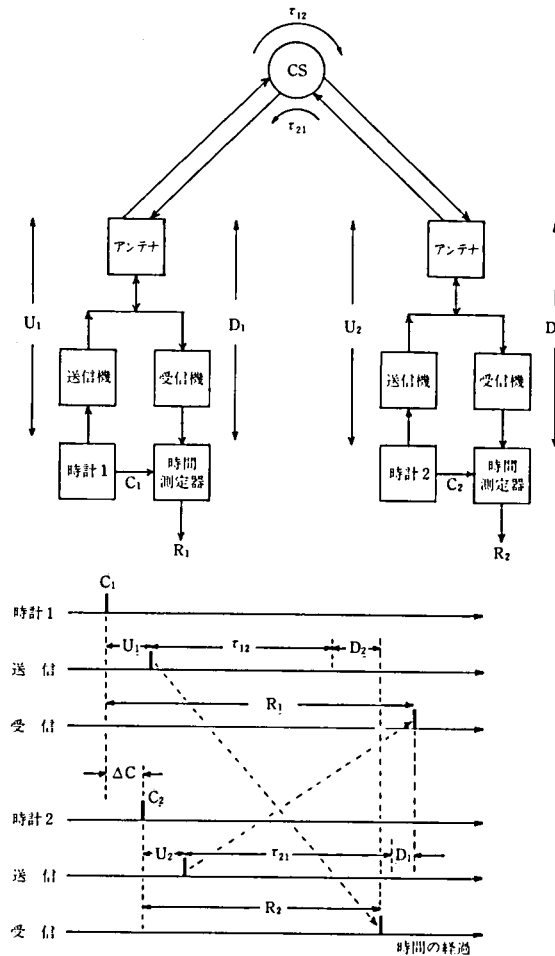


図 4.11 双方向伝送方式による時刻比較の原理

このほか、両時計間の伝搬通路に東西方向成分がある場合、どちらか一方の伝搬の向きは地球自転と同じに、他方はこれと逆になる。そのため、サニャク効果*により、電波伝搬遅延差 $\tau_{12} - \tau_{21}$ はゼロにならず、その値は、地球自転の角速度と、地心、両地点および衛星が作るループの赤道面への投影面積に比例する。この値は、ATS-1 による日米時刻比較実験では、数百 ns に達したが、電波研（小金井市）と鹿島支所間で行われた本節の実験の場合、約 2 ns と推定される⁽⁶⁰⁾。

次に、 $[(U_1 - D_1) - (U_2 - D_2)]$ は両側での実験で決めるが、その測定精度が時刻比較の正確度

* 回転円板や地球上で光干渉計を用いた光の伝搬実験により、回転座標系で測定される 2 点間の光の伝搬時間は、その伝搬の向きで異なることが確かめられている。これがサニャク (Sagnac) 効果である。

表 4.7 双方向伝送における各部遅延など

遅延など \ 側	時計 1	時計 2
時計の時刻	C_1	C_2
送信系遅延 (時計→送信アンテナ)	U_1	U_2
受信系遅延 (受信アンテナ→時間測定器)	D_1	D_2
受信時刻	R_1	R_2
相手方への電波伝搬遅延	τ_{12}	τ_{21}

を決める。上述の ATS-1 による実験では、この測定精度約 10 ns により比較の正確さが制限された⁽⁶³⁾。国際無線通信諮問委員会 (CCIR) の第 7 研究委員会 (SG7) でも、1978 年の CCIR 総会 (京都) 以後、衛星による時刻・周波数比較に関する中間作業班 (IWP 7/4) を作り、この送受信系遅延測定 (目標測定精度 1 ns 以下) を重点項目の一つとした。その後、幾つかの提案もあったが、前記の精度 (約 10 ns) を大幅に改善した実験報告も無い。次に述べる CS 利用の時刻比較実験でも、当然この問題が重要課題となる。

CS を用いた時刻比較実験は、電波研鹿島支所の CS 主局 (アンテナ直径 13 m) と電波研 (小金井市) の CS 小形可搬局 (アンテナ直径 2 m) および同じ地点 (電波研) に設置された小形可搬局と小形車載局 (アンテナ直径 1 m) 相互間で行われた。ここでは主として前者につき述べることにする。

図 4.12 は実験システムのブロック図である。各局の送受信周波数はそれぞれ 30 GHz および 20 GHz、通常の通信の場合の変調は 1 次は周波数変調、2 次はスペクトラム拡散変調で、図の SSRA (Spread Spectrum Random Access) 装置でこれらの変調と復調を行う。しかし、この実験では、SSRA 通信実験装置のうち、衛星測距機能部分を時間比較に利用する。図 4.13 はそのブロック図である。送信側では、自局の原子時計の基準秒信号に位相同期した 16.376 MHz のクロック周波数で駆動される PN 符号 (擬似雑音符号) で 70 MHz の中間周波 (IF) 信号を約 25 MHz の周波数帯域にスペクトル拡散する。受信側では、相手局からの拡散 (IF) 信号に 16.376 MHz の電圧制御水晶発振器 (VCXO) を位相同期させて受信秒信号を再生する。このようにして、送信秒信号と受信秒信号間の時間差を分解能 20 ps の時間間隔カウンタで測定する。

なお、CS 中継の時刻比較の正確度の評価のために、両局の原子時計からの 5 MHz 標準周波数信号を相手局に、7 GHz マイクロ波回線で伝送し、それぞれの標準周波数信号と位相比較を行った。

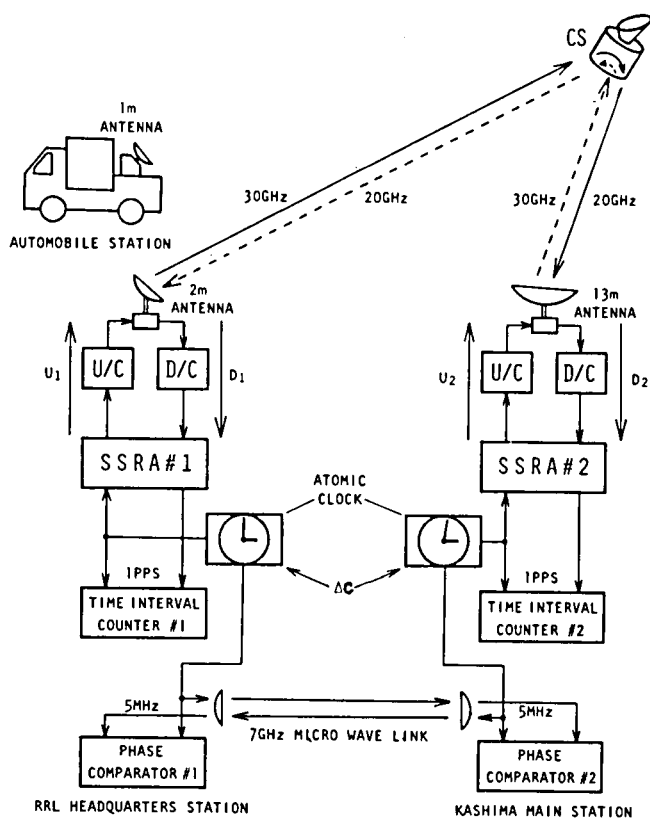


図 4.12 CS 時刻比較実験システム

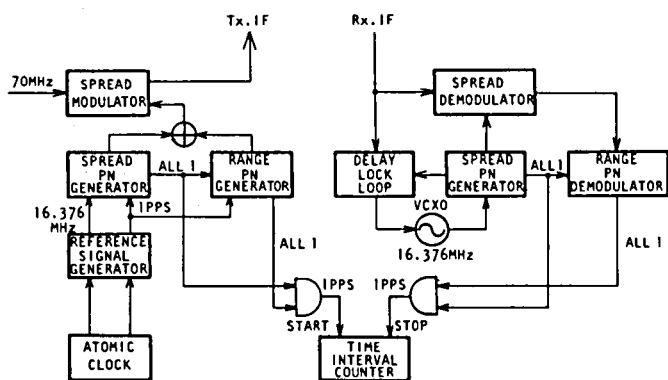


図 4.13 SSRA 実験装置の測距機能を利用した時間測定

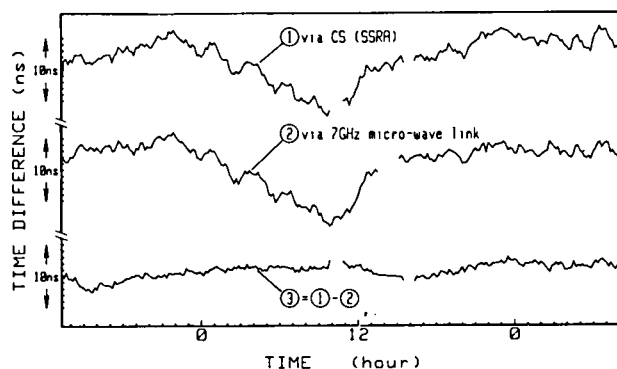


図 4.14 双方向伝送時刻比較結果

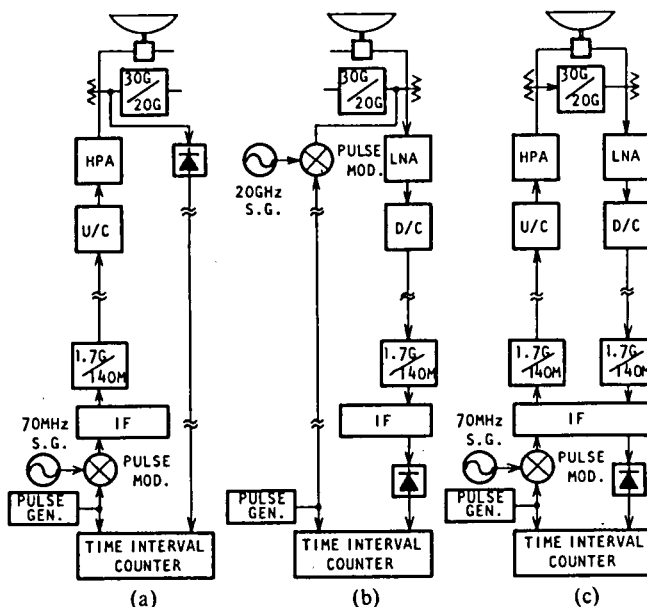


図 4.15 パルス変調による送受信系遅延の測定
(a) 送信系, (b) 受信系, (c) ループ

図 4.14 は CS 主局（鹿島）と小形可搬局（小金井）間のセシウム原子時計の時刻比較結果の一例で、このときの両局での受信 CN 比はともに -6.7 dB（周波数帯域幅 25 MHz）である。図の ① および ② は、それぞれ CS 中継および地上マイクロ波回線による時刻比較結果である。また、③ は両者の差で、マイクロ波回線での変動を含んだ、CS 時刻比較システム総合の変動を示している。この変動は、全測定期間では約 1.1 ns、また、短時間変動は数百 ps である。この短時間変動値は、上述の受信 CN 比（ -6.7 dB）を考慮して、理論的にも、また、これに関する——図 4.13 の 70 MHz 中間周波数段階で送受折り返しの——予備実験の結果から見ても妥当な値

表 4.8 送受信系遅延時間の測定結果

(a) CS 主局 (鹿島)

遅延の種類		遅延時間 [ns]
送信系 (IF → 30 GHz)	U	391.1
受信系 (20 GHz → IF)	D	359.6
ループ (30 GHz/20 GHz 周波数変換器の遅延 7 ns を除く)	L	743.0
$L - (U + D)$		-7.7

(b) CS 小形局

遅延の種類		遅延時間 [ns]
車載局 (1 mφ)	送信系 U_1	329.6
	受信系 D_1	372.0
可搬局 (2 mφ)	送信系 U_2	361.3
	受信系 D_2	401.0
$\Delta = (U_1 - D_1) - (U_2 - D_2)$		-2.7
同位置共通時計法による Δ		-6.3
$\Delta - \Delta_0$		3.6

である。図 4.14 ③ の時刻比較値から求めた周波数安定度 $\sigma_y(\tau)$ は、平均化時間 $\tau = 100 \sim 200$ 分で約 1×10^{-13} であり、この実験における周波数比較の精密度を表している。

このような双方向伝送方式の時刻比較の正確度は、前述のように、送受信系遅延量測定の正確度と精密度では決まる。

図 4.15 は、パルス変調法による送受信系遅延時間の測定方法で、(a) および (b) は、それぞれ、送信系（上り）および受信系（下り）の遅延測定法である。また、(c) は CS 主局（鹿島）における、30 GHz/20 GHz 周波数変換器折り返しのループ遅延の測定法を示す——(a) と (b) には、この部分は含まれていない。なお、これらの測定に含まれない、アンテナまでの導波管部分の遅延時間はその寸法から推定する。

表 4.8 (a) は CS 主局における測定結果である。図 4.15 (a) および (b) の測定による、送受個々の遅延量の合計と (c) によるループ遅延量——この場合、30 GHz/20 GHz 周波数変換器の遅延(約 7 ns)は除いてある——との間に 7.7 ns のくいちがいがでている。その要因として、パルス変調器における変調度の不足による検波波形の立上り時点の測定誤差および同軸ケーブル部分の遅延測定誤差などが考えられる。

また、表 4.8 (b) は CS 小形可搬局（小金井、2 mφ アンテナ）と CS 小形車載局（1 mφ アンテナ）の送受信遅延の測定結果である。表の $\Delta = [(U_1 - D_1) - (U_2 - D_2)]$ は、(4.2) 式に関連し

て述べたように、双方向伝送方式の時刻比較結果に最終的に効く量で、この測定の正確さが非常に重要である。表には、この量を、小形2局の送信系および受信系遅延をそれぞれ個別に測定して求めた結果と“同位置共通時計法”で一括測定した結果とを比較してある。後者は、両小形局を同じ場所に置き、また、同じ原子時計を共通に用いて行った“時刻比較”結果である。この場合、(4.2)式で、 $\Delta C=0$ 、 $\tau_{12}=\tau_{21}$ が成り立つので

$$R_2 - R_1 = (U_1 - D_1) - (U_2 - D_2) \quad (4.3)$$

となり、両局の時間間隔カウンタの読みの差が問題の量に等しくなる。また、この $R_2 - R_1$ の変動は約12時間の測定で0.74 ns (標準偏差) であり、十分小さいと言える。そこでこの“同位置共通時計法”を基準にとると、遅延を個別に求めた結果との差は3.6 ns となり、これに対応するCS主局での値7.7 ns より可成り小さい。

以上のように、CS主局(鹿島)と小形可搬局(小金井)とのCS中継の時刻比較および周波数比較の精密度は、それぞれ約1 ns および 1×10^{-13} が得られた。

また、小形車載局による同位置共通時計法で送受信系遅延を総合評価することにより、1 ns またはそれより良い正確さで時刻比較ができることが分った。さらに、パルス変調による個別測定法により、送受信系遅延を、CS主局では7.7 ns、小形局では3.6 ns の正確さで評価することができた。

4.4 結 論

時間(時刻)および周波数の遠隔比較では、とくに前者の場合、第3章までの実験室内の周波数測定とは異なり、新たに電波伝搬や送受信系の遅延時間が比較の正確さと精密さに大きな影響を及ぼす。比較を行うための信号伝送方式として、一方向と双方向伝送があり、精度は後者が良いが、利用者の負担や数では前者が優っている。遠隔比較に用いられる種々の媒体と方式の精度、利用可能地域などを表4.1で比較した。

これらの媒体のうち、VLF電波と人工衛星につき論じた。

VLF電波を利用した比較方法として、とくに、周波数安定化された海岸局NLKを仲介とした、長期の日米間の比較測定において、電波の昼間の到来時刻(位相)にも季節変化があり、夏季が最もこれの変動が小さいことが確認された。夏季の90日平均の日米間の時刻比較精度は、ロランCによる比較値を基準として $2 \mu\text{s}$ であり、また、周波数比較精度は2標本標準偏差で表すと、平均化時間100日で 2×10^{-13} 程度であることが分った。

人工衛星利用の比較では、まず、航行技術衛星(NTS-1)仲介による約1年間の国際時刻比較実験で、電離層遅延に影響を及ぼす伝搬道路上の全電子数を“Bent”モデルを用いて推定し、

この遅延を補正することにより、時刻比較値の標準偏差を補正しないときの約 60% に減少できた。この場合の比較の精密度は数百 ns、正確度は約 $1\ \mu\text{s}$ であった。

次に実験用通信衛星 CS を用いた鹿島、小金井間の双方向伝送方式による比較実験では、時刻および周波数比較の精密度約 1 ns および 1×10^{-13} がそれぞれ得られた。また、時刻比較の正確度に重大な影響を及ぼす送受信系遅延の測定を個別法と同位置共通時計法の 2 方法で行い、前者の方法では、大形局(鹿島)では 7.7 ns、小形局では 3.6 ns の正確さで、また、後者では約 0.7 ns の正確さでこの遅延評価ができた。したがって、小形車載局で同位置共通時計法を用いることにより、1 ns あるいはそれよりよい正確さで時刻の遠隔比較ができることが分った。

120 項欠

第5章 総 括

各章あるいは各節ごとに既述の結論を要約，補足する。

第1章では，時間・周波数標準とこれに関連の精密測定技術の意義と重要性，また，本研究の背景，経緯および概略につき述べた。

第2章では，始めに周波数測定および周波数標準の利用における周波数安定度の意義を論じた後，周波数および周波数安定度の測定法として，とくに時間領域の測定法を取り上げ，ビート法およびゼロビート法をそれぞれ2・2および2・3節で論じた。

“ビート法”では，アンモニアメーザを基準として，高確度，高安定度の標準器の測定ができ，また，これに及ぼす周波数通倍器の影響を評価することができた。また，通倍器および水晶発振器の安定度特性から後者の短期安定度評価には，平均化時間約10秒が最適であることが分った。

“ゼロビート法”では，通倍器によらず位相同期ループを利用して，同じ公称周波数の高安定度信号発生器相互の周波数安定度の精密測定が可能となり，個々の発生器の安定度評価ができた。なお，この測定系自身の安定度は $4 \times 10^{-14} \tau^{-1}$ ($\tau > 20$ ms) と良い値を示した。

2・4節では，始めに，3台一組にした発振器相互の差周波数の測定値が正規分布に従うと仮定し，この分散から個々の発振器の周波数の分散を推定する際の精度を数式で表現し，これを現実の発振器に適用できた(2・4・1節)。

次の2・4・2節では，標準器の時計面測定値に当てはめた標本回帰多項式の差分係数から求めた平均レートの推定精度の信頼限界を新しく表現した。また，回帰式自身の信頼限界を新しく計算した。

2・5節では，高安定水晶発振器各部の雑音源を仮定し，これらが短期周波数安定度 $\sigma_y(\tau)$ にどのような形で影響するかを具体的に検討した。

第3章では前章の測定に必要な機器の位相および周波数安定度について述べた。

3・2節では真空管およびトランジスタを用いた高周波同調増幅器の位相変動を論じたが，とくに，トランジスタ増幅器フリッカ位相雑音の発生機構を，エミッタ電流およびベース，コレクタ間障壁容量が，トランジスタ固有の低周波雑音により，パラメータ変調されるとして解析し，実験とはほぼ一致した。そしてその種の雑音の小さい増幅器の設計基準を与えた。

3・3節の周波数通倍器では，両波整流形ダブラの位相変動の解析を行い，入力信号レベル，直流供給電源電圧，周囲温度のダブラ出力信号の位相に与える影響を推定した。また，100 kHz → 1.9 GHzの通倍器の位相変動，したがって周波数変動の実験から，この要因が周囲温度と供給

直流電圧の変動であり、これらの影響は、試作通倍器の場合、それぞれ 10^{-12} および $10^{-13} \sim 10^{-12}$ (何れも 10 秒測定) であった。

3・4 節では、ショットキーバリヤダイオードを使用した 2 重平衡混合器の位相雑音測定を行い、これと雑音指数との関連を検討したが、この種の混合器やトランジスタ増幅器の位相雑音は雑音指数だけでは表し難いことが分った。

3・5 節では、周波数通倍による高周波基準信号と、分周、混合の基本回路から合成した低周波基準信号を 2 段の位相同同期周波数変換器に加える方式で高精密度の周波数オフセット器を開発した。また、さらにこれのスペクトル純度を改善する方法を検討した。

第 4 章では、始めに時間と周波数の遠隔比較、とくに、時刻比較における誤差の要因を、一方向および双方向伝送方式について論じた。次に VLF (NLK 局, 18.6 kHz) を仲介とした日米間の長期位相比較から、VLF の昼間の到来位相にも季節変化があること、また、最も安定な夏季昼間の到来位相値 (90 日平均) を用いた日米間時刻比較値の変動は、ロラン C による比較値を基準にして約 $2 \mu\text{s}$ であること、さらに、同じ夏季昼間の比較値の安定度は、 $\sigma_y(\tau)$ で表して約 2×10^{-13} (平均化時間 3 か月) であることが分った。

次に人工衛星による比較では、まず航行技術衛星 (NTS-1) による、約 1 年間の日米時刻比較実験で比較の精密さ数百 ns、正確さ約 $1 \mu\text{s}$ が得られた。また、全電子数を“Bent モデル”で推定し、電離層遅延を双方で補正することにより、上記の精密さを無補正の場合の約 60% に減少した。

次に、準ミリ波帯電波と拡散スペクトル通信実験装置の時間測定機能を用い、実験用通信衛星 (CS) によって主局 (鹿島)、小形可搬局 (小金井) 間の、双方向方式時刻比較実験で比較の精密度数百 ps、周波数安定度 1×10^{-13} (100 秒平均) が得られた。また、パルス変調法による送受信系遅延の測定では、大形局 (主局) の場合、7.7 ns、小形局の場合、3.6 ns の精密さがそれぞれ得られた。さらに、同一地点共通時計法により、小形 2 局総合の遅延 6.3 ns が精密さ 0.74 ns で測定できた。したがって、小形車載局などを利用し、関係 2 局の (局内) 送受信系遅延の精密測定を行うことにより、この値の正確さで時刻の精密比較が可能になった。

以上のように、周波数および周波数安定度の高精度の時間領域測定法および推定法を独自の手法により発展させた。また、測定に必要な同調増幅器、周波数通倍器などの安定度に及ぼす周囲温度、供給電源、雑音などの影響を理論と実験で明らかにし、また、高精度の周波数オフセット器を開発した。さらに、時間の遠隔比較では、とくに、実験用通信衛星を用いて従来にまさる高精度を得た。このようにして、周波数標準器およびこれの各種の応用システムの研究開発に有効な基礎資料を得ることができた。

謝 辞

本研究の取りまとめについて、終始御鞭撻を頂いた元電波研究所長湯原仁夫博士に深甚なる謝意を表します。同時に、長年月にわたって研究指導をしていただいた佐分利義和元同所総合研究官に心から感謝いたします。

本研究の取りまとめに際し、京都大学教授小川徹博士に詳細にわたって検討していただきました。ここに改めて深甚なる謝意を表します。

また、本研究の担当およびこれに協力いただいた同所周波数・時刻比較研究室長吉村和幸博士および原田喜久男元同所計算機研究室長に敬意と謝意を表します。

さらに、それぞれ第3章および第4章関連の研究の担当と取りまとめをされた小宮山牧兎同所主任研究官および今江理人同所主任研究官に心から感謝の意を表すとともに、本研究に協力いただいた梅津純同所主任研究官および岡沢治夫同所研究官に深く感謝いたします。

なお、永年にわたり、本研究を御支援下さった周波数標準部を始め電波研究所の方々に深く感謝いたします。

最後に、本研究の取りまとめについて種々励ましのお言葉を頂いた京都大学名誉教授池上淳一博士と京都大学教授木嶋昭博士に深甚なる謝意を表すると共に、本研究に御理解をいただいた仙台電波工業高等専門学校長高橋正博士に深く感謝いたします。

124 項欠

参 考 文 献

- (1) 磯部；“物理測定と標準”，共立出版，(1975)。
- (2) 安田；“周波数標準に関する最近の動向”，第6回電波研究発表会予稿(昭56-10)。
- (3) 村主，安田；“電橋安定型水晶発振器の短時間中の周波数安定度”，電波研季報 No. 1, pp. 27-32 (1954-10)。
- (4) 安田；“正規回帰による周波数標準器の時計面および平均レートの推定精度について”，電波研季報 Vol. 19, No. 100, pp. 21-30 (1973-1)。
- (5) 長竹，佐分利，大井，安田，伊藤；“電源変調方式原子時計の試作”，電波研季報 Vol. 2, No. 7, pp. 63-67 (1956-4)。
- (6) 長竹，安田，長友；“吸収型原子時計において吸収の中心周波数を検出するためのFS変調方式”，電波研季報 Vol. 5, No. 21, pp. 251-259 (1959-10)。
- (7) 佐分利，安田，小林，原田，林；“アンモニア3-2線メーザと周波数比較の精度について”，電波研季報 Vol. 7, No. 30, pp. 257-277 (1961-5)。
- (8) Y. Saburi, M. Kobayashi, Y. Yasuda, K. Harada；“Characteristics of the 3-2 line double-beam maser of $N^{14}H_3$ and the precision of frequency comparison”，Jour. Radio Res. Labs., Vol. 9, No. 43, pp. 241-276 (1962-5)。
- (9) Y. Saburi, M. Kobayashi, Y. Yasuda, K. Harada；“Characteristics of the 3-2 line double-beam maser of $N^{14}H_3$ and the precision of frequency comparison”，IRE Trans. Instrum. Meas., Vol. IM-11, Nos. 3/4, pp. 204-211 (1962-12)。
- (10) 安田，原田，佐分利，小林，島田；“周波数通倍器の位相変動”，電波研季報 Vol. 9, No. 40, pp. 30-49 (1963-1)。
- (11) Y. Saburi, Y. Yasuda, K. Harada；“Phase variation in the frequency multiplier”，Jour. Radio Res. Labs., Vol. 10, No. 48, pp. 137-175 (1963-3)。
- (12) 安田，吉村；“高安定発振器の短時間周波数安定度と周波数スペクトルの測定”，電波研季報 Vol. 10, No. 50, pp. 179-190 (1964-9)。
- (13) 安田；“水晶発振器の短時間周波数安定度の測定”，昭和41年電気四学会連合大会 1746 (昭42-4)。
- (14) E. Bava, G.P. Bava, A. De Marchi, A. Godone；“Measurement of static AM-PM conversion in frequency multipliers”，IEEE Trans. Instrum. Meas. Vol. IM-26, No. 1, pp. 33-38 (1977-3)。
- (15) V.F. Kroupa；“Frequency Synthesis” Griffin, London (1973)。
- (16) L.S. Cutler；“Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards”，Proc. Symp. on the Definition and Measurement of Short Term Frequency Stability, Goddard Space Flight Center, NASA (1964)。
- (17) 安田，吉村，齊藤；“周波数オフセットの一方法”，電波研季報 Vol. 12, No. 61, pp. 221-228 (1966-7)。
- (18) 栗原；“精密周波数オフセット”，電子通信学会論文誌 57-B-1, pp. 8-15 (昭49-1)。
- (19) Japan；“Measurement of short-term instability and frequency spectra of highly stable quartz oscillators”，CCIR Doc. V11/J-3 (1964-11)。
- (20) 周波数精密測定回路専門委員会；“周波数安定度とその測定”，電気学会技術報告(II部)第41号(昭51-2)。
- (21) Y. Yasuda, H. Okazawa, K. Akatsuka, T. Matsuura；“International time and frequency comparison for long term via VLF and Loran-C”，Proc. 9th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI), Applications and Planning Meeting, Greenbelt, Md. USA, pp. 289-296 (1977-11)。
- (22) Y. Saburi, Y. Yasuda, S. Kobayashi, T. Sato；“T & F comparison via Broadcasting Satellite and Navigation Technology Satellite”，Proc. 11th Annual PTTI Meeting, Greenbelt, Md. USA, pp. 315-328 (1979-11)。

- (23) Y. Saburi, Y. Yasuda, S. Kobayashi, T. Sato, M. Imae; "Experiment of standard frequency and time signal dissemination via BSE", XXXI Congress International Astronautical Federation, Tokyo, IAF-80-D-197 (1980-9).
- (24) M. Imae, H. Okazawa, T. Sato, M. Uratsuka, K. Yoshimura, Y. Yasuda; "Time comparison experiments with small K-band antennas and SSRA equipments via a domestic geostationary satellite", IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. IM-32, No. 1, pp. 199-203 (1983-3).
- (25) J.A. Barnes et al.; "Characterization of frequency stability", IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. IM-20, No. 2 pp. 105-119 (1971-5).
- (26) L.S. Cutler, C.L. Searle; "Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards", Proc. IEEE Vol. 54, No. 2, pp. 136-154 (1966-2).
- (27) 安田, 小宮山, 梅津; "水晶発振器の周波数安定度の測定", 電気学会標準周波数発生回路調査専門委員会資料 13-2 (昭 49-5).
- (28) 安田, 小宮山, 梅津; "ゼロビート法による周波数安定度の測定", 昭和 49 年電気四学会中国支部連合大会 42115 (昭 49-11).
- (29) 安田; "周波数標準器の安定度について", 電子通信学会信頼性研究会資料 R69-7 (1969-7),
- (30) 産業計測標準委員会高周波部会; "高周波・マイクロ波・レーザ計測", 日本産業技術協会 (1975-1).
- (31) S.S. ウィルクス (小河原訳); "数理統計学", 春日出版社 (1951-5).
- (32) D.B. Leeson; "A simple model of feedback oscillator noise spectrum", Proc. IEEE Vol. 54, No. 2, pp. 329-330 (1966-2).
- (33) 内田, 佐藤, 児玉; "水晶発振器周波数安定度(時間領域)の周囲温度変化による影響", 電気学会高安定周波数発生回路調査専門委員会資料 13-3 (昭 51) または "高安定周波数発生装置の現状", 電気学会技術報告 (II 部) 第 128 号 (昭 57-4).
- (34) 安田ほか; (10) に同じ.
- (35) Y. Saburi et al.; (11) に同じ.
- (36) 小宮山, 安田; "FR トランジスタ増幅器のフリッカ位相雑音", 電波研季報 Vol. 20, No. 110, pp. 517-524 (1974-9).
- (37) 小宮山, 安田; "高安定信号源と RF 増幅器のフリッカ位相雑音", 電子通信学会論文誌 J60-B, No. 3, pp. 197-204 (昭 52-3).
- (38) G.E. Valley, Jr., H. Wallman; "Vacuum tube amplifiers", McGRAW-WILL BOOK CO. (1948).
- (39) 宮脇; "雑音解析", 朝倉書店 (昭 36-10).
- (40) 関; "雑音", 岩波全書 (昭 29-1).
- (41) D. Halford et al.; "Flicker noise of phase in RF amplifiers and frequency multipliers", Proc. 22nd Annual Symposium on Frequency Control, p. 340 (1968-4).
- (42) D.J. Healey III; "Flicker of frequency and phase and white frequency and phase fluctuation in frequency sources", Proc. 26th Annual Symposium on Frequency Control, p. 29 (1972-6).
- (43) 小宮山, 安田; "周波数混合器の位相雑音", 電気学会周波数精密測定回路専門委員会資料 30-4 (昭 47-10) および 31-4 (昭 47-12).
- (44) 栗原; "連続可変電子式周波数オフセッタの試作", 電気学会周波数精密測定回路専門委員会資料 27-5 (昭 47).
- (45) 栗原; (18) に同じ.
- (46) J.A. Barnes, A. Wainright; "A precision pulse-operated electronic phase shifter and frequency translator", Proc. IEEE (Correspondence) Vol. 53, No. 12, pp. 2143-2144 (1965-12).
- (47) 安田; "標準周波数の精密オフセット装置", 特許番号 617419 (登録昭 46.9.3).
- (48) 安田, 小林, 吉村, 佐藤, 斉藤; "周波数精密オフセット装置", 電子通信学会全国大会 219 (昭 42-10).
- (49) Y. Yasuda, Y. Saburi; "Recent activities on time and frequency at the Radio Research Laboratories", Jour. Institution of Electronics and Telecommunication Engineers (India) Vol. 27, No.

- 10, pp. 345-350 (1981).
- (50) 佐分利, 安田, 小林, 佐藤; “TV 信号を利用した時刻と周波数の精密比較”, 電波研季報 Vol. 18, No. 99, pp. 433-444 (1972-11).
 - (51) 安田; “高安定周波数の現況と将来——時刻と周波数の国際比較”, 昭和 55 年電気四学会連合大会 21-6, p. 3-197 (昭 55-10).
 - (52) J.A. Pierce; “The diurnal carrier-phase variation of a 16-kilocycle transatlantic signal”, Proc. IRE, vol. 43, pp. 584-588 (1955-5).
 - (53) VLF 標準周波数受信回路専門委員会; “長波標準電波受信装置”, 電気学会技術報告 (I 部) 第 80 号 (昭 42-6).
 - (54) 中島, 鈴木, 東, 赤塚, 中村; “VLF による国際周波数比較装置と東京ハワイ間の位相変動の測定結果”, 電波研季報, Vol. 9, p. 109 (1963-5).
 - (55) 東; “VLF (NPG/NLK) 電波の位相測定結果”, 電波研季報, Vol. 11, No. 56, pp. 242-251 (1965-9).
 - (56) 安田, 赤塚, 松浦; “VLF による周波数国際比較”, 昭和 44 年電気四学会連合大会 2799 (昭 44-3).
 - (57) J.R. Wait; “The mode theory of VLF ionospheric propagation for finite ground conductivity”, Proc. IRE, Vol. 45, p. 760 (1957-6).
 - (58) J. McA. Steele, W. Markowitz, C.A. Lidback; “Telstar time synchronization”, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. IM-13, pp. 164-170 (1964-12).
 - (59) W. Markowitz, C.A. Lidback, H. Uyeda, K. Muramatsu; “Clock synchthonization via Relay II satellite”, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. IM-15, No. 4, pp. 177-184 (1966-12).
 - (60) Y. Saburi, M. Yamamoto, K. Harada; “High-precision time comparison via satellite and observed discrepancy of synchronization”, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. IM-25, No. 4, pp. 473-477 (1976-12).
 - (61) J.A. Klobachar; “A first-order, world-wide, ionospheric time-delay algorithm”, Tech. Rep. 75-0502, Air Force Cambridge Research Laboratories, Bedford Mass. (1975).
 - (62) 精密周波数同期回路調査専門委員会; “高安定周波数とその同期”, 電気学会技術報告 (II 部) 第 175 号 (昭 59-9).
 - (63) M. Yamamoto, K. Harada, Y. Saburi; “A time comparison experiment performed by SSRA system via ATS-1”, Jour. Radio Res. Labs., Vol. 23, No. 110, pp. 85-103 (1976-3).
-

128項欠

付 録 1 用 語

CCIR 報告 730

用語解 (1978, 抜粋)

0.1 Accuracy (正確さ, 正確度, 確度又は精度)

一般には, 測定値の系統的な不確かさと等価である (0.3 参照)。

0.2 Precision (精密さ, 精密度又は精度)

測定値のランダムな不確かさで, 標準偏差又はその整数倍で表す (0.3 参照)。

0.3 Uncertainty (不確かさ)

測定の実値からの可能なずれ (deviation) の大きさを言う。

しばしば, これを系統的な不確かさとランダムな不確かさで区別し得る。

ランダムな不確かさは標準偏差又はその整数倍で表される。系統的な不確かさは一般にパラメータの特性に基づいて推定される。

一般に, “正確さ” は “系統的な不確かさ” に, “精密さ” は “ランダムな不確かさ” にそれぞれ等価である。同様に全確度 (total accuracy) は全体の不確かさ (overall uncertainty = systematic uncertainty + random uncertainty) に等価である。

0.4 Error (誤差)*

故意でない測定値と真値の差

0.5 Frequency instability (周波数不安定度)

ある与えられた時間間隔 τ 内での周波数変化で表される。一般に, 周波数ドリフト (1.10 参照) とランダムな周波数変動とを区別する。この変動の特徴づけのために特殊な分散が開発されている。

0.7 Reproducibility (再現性)

- (a) 同じ設計の独立な装置の集合の場合, これらの装置により得られる値の標準偏差,
- (b) 繰り返し運用される単一の装置の場合, この装置により得られる値の標準偏差である。

0.8 Resetability (リセッタビリティ)

明示されたパラメータが, 定められた使用条件のもとで, 独立に調整されるとき, 装置から得られる値の間の不可避なずれ。

注—これは信頼限界 (すなわち, 測定値の不確かさ) の推定値で与えられる。

Resettability は、周波数発生器ではなく、測定手順に関する従来の用語、Repeatability (反復性) にとって代わるものである。

0.9 Calibration (校正)*

装置及び、又は手順において、測定誤差を確定 (identify) する過程。

注—多くの場合、例えば周波数発生器では、校正は装置の安定度に関係するので、その結果は時間の関数である。

0.10 Nominal value (公称値)*

その値の実現の不確かさには無関係な、明記又は意図された値。

注—物理量を実現するある装置では、公称値は製造者によって明示された、その量の値である。これは理想値であるから、許容誤差を伴わない。

0.11 Offset (オフセット)*

実現値と公称値との間の意図的な差

0.12 Normalized offset (規格化オフセット)

オフセットを公称値で割った値。

1.4 Standard frequency (標準周波数)

周波数標準と既知の関係にある周波数。

注—標準周波数の用語は、その周波数が標準周波数であるような信号に対してもしばしば用いられる。

1.7 Frequency departure (周波数のずれ、周波数偏差)

公称周波数値からの意図しない偏差 (deviation)。

“frequency deviation” という用語は、周波数変調に関連して使われるので使用しないこと。

1.9 Frequency shift (周波数シフト、周波数推移)

変調の目的に用いられる意図的な周波数変化又は物理法則に起因する意図しない周波数変化。

注—周波数シフトという用語は、他の CCIR SG では、変調の目的に関連して意図した周波数変化のみに適用されるので、この用語を意図しない周波数変化の意味に使わないよう勧める。

1.10 Frequency drift (周波数ドリフト)*

時間と共に生ずる、望ましくない漸近性の周波数変化。

この定義も IEV のそれと異なるが、SG7 では上記の実義を採る。

1.14 Frequency standard (周波数標準)

出力信号が正確な周波数の基準 (reference) として使用されるような信号発生器。

1.15 Primary frequency standard (一次周波数標準)

周波数が採用された秒の定義に対応し、その装置を校正しないで達成される、明示された正確さを持つような周波数標準。

注—国際的に認められた測定関連機関は CGPM (国際度量衡総会) であり、現在、採用されている基準はセシウム 133 原子の明示された遷移である。

1.16 Secondary frequency standard (二次周波数標準)

一次周波数標準で較正される周波数標準。“二次”という語は分類体系 (hierarchy) におけるその標準の地位を表しているのであって、必ずしもその標準の性能の質について言っているのではない。

2.1 Phase (位相)

一般に、時間 (又は空間) の関数により解析的に表された周期現象においては、位相はその現象自身の可能な見分け得る状態である。

位相はその現象生起の、ある明示された基準からの経過時間で確定 (identify) でき、正しくは“位相時間(phase time)”と呼ばれる。特に、現象が正弦波なら、位相は、ある指定された基準から測られた角度又は時間により確定できる。

標準周波数・報時業務では、位相時間差 (phase-time difference)、すなわち、同一現象又は二つの異なる現象の二つの確認された (identified) 位相間の時間差、が主として考慮される。

3.3 International Atomic Time (TAI, 国際原子時)

原子時の国際基準時系 (TAI) は、平均海水面で実現される SI 秒 (国際単位系の秒) に基づくもので協力機関から供給される時計のデータに基づき、国際報時局 (BIH) により作られる。TAI は、原点の 1958 年 1 月 1 日から数えた日、時、分、秒というような連続した時間尺度の形式をとっている (1971 年 CGPM 採択)。

3.4 Coordinated Universal Time (UTC, 協定世界時)

UTC は BIH によって維持される時系で、協定された標準周波数と報時信号発射の基礎になっている。これは TAI と全く同じ歩度に対応するが、秒が整数値だけ異なっている。

UTC 時系は、UT1 に近似的に一致することを保証するために、秒の挿入又は除去 (正又は負のうるう秒) によって調整される。

付 録 2 (2-34), (2-50) および (2-113) 式の誘導

(1) (2-34) 式の誘導

$\bar{\sigma}_1^2$ の分散は (2.32) および (2.33) 式により

$$\begin{aligned}
 \text{Var } \bar{\sigma}_1^2 &= E[\bar{\sigma}_1^2 - E(\bar{\sigma}_1^2)]^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left[E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{12}^2}{N-2} - \sigma_{12}^2\right)^2 + E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{13}^2}{N-2} - \sigma_{13}^2\right)^2 + E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right)^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{12}^2}{N-2} - \sigma_{12}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{13}^2}{N-2} - \sigma_{13}^2\right) - E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{12}^2}{N-2} - \sigma_{12}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right) \right. \\
 &\quad \left. - E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{13}^2}{N-2} - \sigma_{13}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right) \right] \quad (\text{A2.1})
 \end{aligned}$$

$\text{Var } \bar{\sigma}_2^2$, $\text{Var } \bar{\sigma}_3^2$ についても同様である。

(A2.1) 式の前半部において関係式

$$\text{Var}[\chi^2(n)] = 2n \quad (\text{A2.2})$$

を用いて

$$\left. \begin{aligned} E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{12}^2}{N-2} - \sigma_{12}^2\right)^2 &= \frac{2\sigma_{12}^4}{N-2} \\ E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{13}^2}{N-2} - \sigma_{13}^2\right)^2 &= \frac{2\sigma_{13}^4}{N-2} \\ E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right)^2 &= \frac{2\sigma_{23}^4}{N-2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.3})$$

また, (A2.1) 式の後半部において

$$\left. \begin{aligned} E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{12}^2}{N-2} - \sigma_{12}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{13}^2}{N-2} - \sigma_{13}^2\right) &= \frac{1}{N-2} E(N\bar{\sigma}_{12}^2 \cdot N\bar{\sigma}_{13}^2) - \sigma_{12}^2 \sigma_{13}^2 \\ E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{13}^2}{N-2} - \sigma_{13}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right) &= \frac{1}{N-2} E(N\bar{\sigma}_{13}^2 \cdot N\bar{\sigma}_{23}^2) - \sigma_{13}^2 \sigma_{23}^2 \\ E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{12}^2}{N-2} - \sigma_{12}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right) &= \frac{1}{N-2} E(N\bar{\sigma}_{12}^2 \cdot N\bar{\sigma}_{23}^2) - \sigma_{12}^2 \sigma_{23}^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.4})$$

次に (A2.4) 式における $E(N\bar{\sigma}_{12}^2 \cdot N\bar{\sigma}_{13}^2)$, $E(N\bar{\sigma}_{13}^2 \cdot N\bar{\sigma}_{23}^2)$ などを計算する。(2.22), (2.29) および (2.30) 式から

$$\begin{aligned}
E(N\hat{\sigma}_{i2}^2 \cdot N\hat{\sigma}_{i3}^2) &= E\left\{ \sum_{i=1}^N [y_i(1, 2) - \hat{a}_{12} - \hat{b}_{12}x_i]^2 \cdot \sum [y_j(1, 3) - \hat{a}_{13} - \hat{b}_{13}x_j]^2 \right\} \\
&= E\left[\sum_{i=1}^N (v_{i1} - v_{i2})^2 \cdot \sum_{j=1}^N (v_{j1} - v_{j3})^2 \right]
\end{aligned} \tag{A2.5}$$

ここで

$$v_{ik} = y_{ik} - \hat{a}_k - \hat{b}_k x_i \quad (i=1, 2, \dots, N; k=1, 2, 3) \tag{A2.6}$$

(A2.5) 式を展開すると

$$\begin{aligned}
E(N\hat{\sigma}_{i2}^2 \cdot N\hat{\sigma}_{i3}^2) &= E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j1}^2) + E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j3}^2) \\
&\quad + E(\sum_i v_{i2}^2 \cdot \sum_j v_{j1}^2) + E(\sum_j v_{j2}^2 \cdot \sum_j v_{j3}^2) \\
&\quad - 2E(\sum_i v_{i1}v_{i2} \cdot \sum_j v_{j1}^2) \\
&\quad - 2E(\sum_j v_{j1}v_{j2} \cdot \sum_j v_{j3}^2) + 4E(\sum_i v_{i1}v_{i2} \cdot \sum_j v_{j1}v_{j3}) \\
&\quad - 2E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j1}v_{j3}) - 2E(\sum_i v_{i2}^2 \cdot \sum_j v_{j1}v_{j3})
\end{aligned} \tag{A2.7}$$

(A2.7) 式第 1 項は (2.24) および (A2.2) 式から

$$\begin{aligned}
E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j1}^2) &= E[\sum_i (y_{i1} - \hat{a}_1 - \hat{b}_1 x_i)^2] \\
&= E(N\hat{\sigma}_1^2) = N(N-2)\sigma_1^4
\end{aligned} \tag{A2.8}$$

第 2 項は 2.4.1(2) の仮定 (c), (2.21) 式を用いて次のように求められる。

$$E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j3}^2) = E[\sum_i (y_{i1} - \hat{a}_1 - \hat{b}_1 x_i)^2 \cdot \sum_j (y_{j3} - \hat{a}_3 - \hat{b}_3 x_j)^2] \tag{A2.9}$$

上式の $\sum_i (y_{i1} - \hat{a}_1 - \hat{b}_1 x_i)^2$ および $\sum_j (y_{j3} - \hat{a}_3 - \hat{b}_3 x_j)^2$ は (2.23) 式から、それぞれ y_{i1} および y_{j3} の関数である。また、前述の仮定 (c) により、 y_{i1} , y_{j3} は i, j の値に関係なく独立である。したがって、 $\sum_i v_{i1}^2$ と $\sum_j v_{j3}^2$ は独立であり、(A2.9) 式は次のようになる。

$$E(\sum_i v_{i1}^2 \cdot \sum_j v_{j3}^2) = E(v_{i1}^2)E(v_{j3}^2) = (N-2)^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 \tag{A2.10}$$

(A2.7) 式の第 3 および第 4 項も同様に

$$E(\sum_i v_{i2}^2 \cdot \sum_j v_{j1}^2) = (N-2)^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \tag{A2.11}$$

$$E(\sum_i v_{i2}^2 \cdot \sum_j v_{j3}^2) = (N-2)^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \tag{A2.12}$$

さらに、(A2.7) 式第 5 項以下はすべて 0 になることが証明できる。同式第 5 項において

$$\begin{aligned}
E(\sum_i v_{i1}v_{i2} \cdot \sum_j v_{j1}^2) &= \sum_i \sum_j E(v_{i1}v_{i2}v_{j1}^2) \\
&= \sum_{i=1}^N E(v_{i1}^3v_{i2}) + \sum_{i \neq j} E(v_{i1}v_{i2}v_{j1}^2)
\end{aligned}$$

この式で v_{i1} と v_{i2} は、前述のように、異なる発振器に関する仮定 (c) により独立である。また、第2項の総和において、 $i \neq j$ に対しては v_{i1} , v_{i2} , v_{j1}^2 は相互に独立である。したがって

$$\begin{aligned}
E(\sum_i v_{i1}v_{i2} \cdot \sum_j v_{j1}^2) &= \sum_{i=1}^N E(v_{i1}^3)E(v_{i2}) \\
&\quad + \sum_{i \neq j} E(v_{i1})E(v_{i2})E(v_{j1}^2) = 0
\end{aligned} \tag{A2.13}$$

なお上式では

$$E(v_{i1}) = E(v_{i2}) = 0 \tag{A2.14}$$

を考慮している。第6項以下も全く同様である。したがって、(A2.7)式は (A2.8), (A2.10), (A2.11), (A2.12) および (A2.13) 式などにより次式のようにになる。

$$E(N\bar{\sigma}_{i2}^2 \cdot N\bar{\sigma}_{i3}^2) = N(N-2)\sigma_1^4 + (N-2)^2(\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2) \tag{A2.15}$$

また、(A2.4), (A2.15) および (2.27) 式により

$$E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{i2}^2}{N-2} - \sigma_{i2}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{i3}^2}{N-2} - \sigma_{i3}^2\right) = \frac{2\sigma_1^4}{N-2} \tag{A2.16}$$

全く同様にして

$$E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{i2}^2}{N-2} - \sigma_{i2}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right) = \frac{2\sigma_2^4}{N-2} \tag{A2.17}$$

$$E\left(\frac{N\bar{\sigma}_{i3}^2}{N-2} - \sigma_{i3}^2\right)\left(\frac{N\bar{\sigma}_{23}^2}{N-2} - \sigma_{23}^2\right) = \frac{2\sigma_3^4}{N-2} \tag{A2.18}$$

(A2.1), (A2.3), (A2.16), (A2.17), (A2.18) および (2.27) 式により

$$\begin{aligned}
Var \bar{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{N-2}(2\sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2) \\
&= \frac{1}{N-2}(\sigma_1^4 + \sigma_{i2}^2\sigma_{i3}^2)
\end{aligned} \tag{A2.19}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
Var \bar{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{N-2}(2\sigma_2^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2) \\
&= \frac{1}{N-2}(\sigma_2^4 + \sigma_{i2}^2\sigma_{23}^2)
\end{aligned} \tag{A2.20}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var } \hat{\sigma}_3^2 &= \frac{1}{N-2} (2\sigma_3^4 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) \\
&= \frac{1}{N-2} (\sigma_3^4 + \sigma_{13}^2 \sigma_{23}^2)
\end{aligned} \tag{A2.21}$$

(A2.19), (A2.20) および (A2.21) 式が目的の (2.34) 式である。

(2) (2-50) 式の誘導

(2.48) および (2.49) 式から

$$\sum_{p=1}^k (\hat{a}_p - a_p) x_p / \sigma \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q}$$

は正規分布 $N(0, 1)$ にしたかう。また $q_1 \equiv \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi})^2$ は自由度 $n-k$ のカイ 2 乗分布をなすから、 t 分布の定義により

$$\frac{\sum_{p=1}^k (\hat{a}_p - a_p) x_p / \sigma \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q}}{\sqrt{q_1/(n-k)}}$$

は自由度 $n-k$ の t 分布にしたかう。これを t_{n-k} とおき

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi})^2$$

なる標本分散 s^2 をとれば

$$q_1/(n-k) = s^2/\sigma^2$$

であるから

$$t_{n-k} = \frac{\sum_{p=1}^k (\hat{a}_p - a_p) x_p}{s \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q}}$$

この分布において α を危険率とするとき

$$p_r\{|t_{n-k}| > t_{n-k}(\alpha)\} = \alpha$$

なる $t_{n-k}(\alpha)$ が t 分布表から求められる。

$$\therefore P_r \left\{ \left| \frac{\sum_{p=1}^k (\hat{a}_p - a_p) x_p}{s \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q}} \right| \leq t_{n-k}(\alpha) \right\} = 1 - \alpha$$

したがって信頼係数 $1 - \alpha$ で次式が成立し、(2.50) 式の信頼限界がえられる。

$$\sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p - s t_{n-k}(\alpha) \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q} \leq \sum_{p=1}^k a_p x_p \leq \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p + s t_{n-k}(\alpha) \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q}$$

(3) (2-113) 式の誘導

(2.109), (2.110) および (2.112) 式から次の連立方程式を得る。

$$\sum_{q=1}^k a_{pq} (\hat{a}_q - a_q) = \frac{x_p}{2\lambda}, \quad p=1, 2, \dots, k \quad (\text{A2.22})$$

これを解けば

$$\begin{aligned} \hat{a}_p - a_p &= \frac{1}{2\lambda A} \sum_{r=1}^k x_r A_{rp} \\ &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{r=1}^k x_r a^{rp}, \quad p=1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (\text{A2.23})$$

ここで A は (2.45) 式と同様 a_{pq} の作る k 次の行列式, A_{rp} はその行列式の要素 a_{rp} の余因子である。また, (2.47) 式と同様

$$a^{rp} = A_{rp}/A \quad (\text{A2.24})$$

である。(A2.23) 式を (2.109) 式に代入すれば

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \sum_{p,q=1}^k a_{pq} \sum_{r=1}^k x_r a^{rp} \sum_{s=1}^k x_s a^{sq} - s^2 k F_{n-k}^k(\alpha) = 0$$

和の順序を交換して

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^k x_r a^{rp} \sum_{s=1}^k x_s \sum_{q=1}^k a_{pq} a^{sq} - s^2 k F_{n-k}^k(\alpha) = 0$$

この式で行列式の性質

$$\sum_{q=1}^k a_{pq} a^{sq} = \delta_{ps}, \quad \delta_{ps} = \begin{cases} 1 & (p=s) \\ 0 & (p \neq s) \end{cases} \quad (\text{A2.25})$$

を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^k a^{rp} x_r x_p - s^2 k F_{n-k}^k(\alpha) = 0 \\ \therefore \frac{1}{2\lambda} &= \pm \frac{s \sqrt{k F_{n-k}^k(\alpha)}}{\sqrt{\sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^k a^{rp} x_r x_p}} \end{aligned} \quad (\text{A4.26})$$

次に (A2.23) 式を (2.110) 式に代入して

$$y = \sum_{p=1}^k a_p x_p = \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p - \frac{1}{2\lambda} \sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^k a^r x_r x_p \quad (\text{A2.27})$$

(A2.26) および (A2.27) 式から

$$y = \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p \mp s \sqrt{k F_{n-k}^k(\alpha)} \sqrt{\sum_{r,p=1}^k a^r x_r x_p}$$

添字を書き換えて整理し目的の式を得る。

$$y = \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_p \pm s \sqrt{k F_{n-k}^k(\alpha)} \sqrt{\sum_{p,q=1}^k a^{pq} x_p x_q} \quad (2.113)$$

ここで

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{p=1}^k \hat{a}_p x_{pi} \right)^2 \quad (2.108)$$

付 録 3 周波数安定度の定義

信号発生器の出力電圧 $V(t)$ は一般に次式のように表せる。

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)] \sin [2\pi\nu_0 t + \phi(t)] \quad (\text{A3.1})$$

ここで, V_0 および ν_0 はそれぞれ公称の振幅および周波数で, 振幅の変動 $\varepsilon(t)$ は無視できるものとする。瞬時周波数 $\nu(t)$ は (A3.1) 式から

$$\nu(t) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t) \quad (\text{A3.2})$$

となるが, その変動分 $(1/2\pi)\dot{\phi}(t)$ は ν_0 に比較して十分小さいものとする。そこで

$$y(t) = \dot{\phi}(t) / 2\pi\nu_0 \quad (\text{A3.3})$$

とおけば, 瞬時周波数 $\nu(t)$ は

$$\nu(t) = \nu_0 [1 + y(t)] \quad (\text{A3.4})$$

となり

$$y(t) = [\nu(t) - \nu_0] / \nu_0 \equiv \Delta\nu / \nu_0 \quad (\text{A3.5})$$

は公称周波数 ν_0 で規格化した, ν_0 からの瞬時周波数変動を表すことになる。また, (A3.1) 式における $\phi(t)$ には, たとえば時間と共に直線的に変化するような, 系統的な変動は含まれないも

のとする。さらに、 $\phi(t)$ は t の原点移動により任意の値をとりうるから、 $\phi(t)$ および $\dot{\phi}(t)$ の長時間平均はいずれも0と仮定できる。すなわち次式が成り立つ。

$$\langle \phi(t) \rangle = 0, \langle y(t) \rangle = 0 \quad (\text{A3.6})$$

周波数安定度の尺度

(1) パワースペクトル密度 $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ または $S_x(f)$ ——周波数領域の尺度

ここで $y(t)$ は、上述のように、公称周波数 ν_0 で規格化した瞬時周波数変動、 $\phi(t)$ は上述の意味の瞬時位相変動、 $x(t) = \phi(t)/2\pi\nu_0$ は位相時間(phase-time)である。明らかに $y(t) = dx(t)/dt$ であり、 $f(>0)$ はフーリエ周波数(変調または変動分の周波数)である。明らかに

$$S_y(f) = (f^2/\nu_0^2) S_\phi(f) = 4\pi^2 f^2 S_x(f) \quad (\text{A3.7})$$

であり、 $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ および $S_x(f)$ の次元はそれぞれ Hz^{-1} , $\text{rad}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ および $\text{s}^2 \text{Hz}^{-1}$ である。

(2) 2 標本標準偏差 $\sigma_y(\tau)$ ——時間領域の尺度

$$\sigma_y(\tau) = \left[\left\langle \frac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}{2} \right\rangle \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A3.8})$$

これが周波数安定度の第2の尺度であるが、第2～第4章の記述との関連上、補足説明する。

\bar{y}_k を図 A3.1 に示すように、時点 t_k から始まる平均化時間(測定時間) τ での $y(t)$ の平均値とする。すなわち

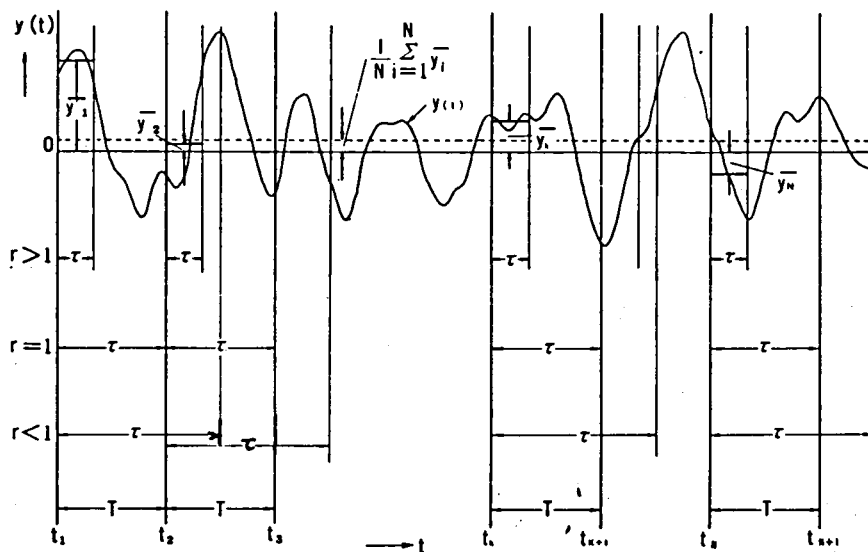


図 A3.1 標準偏差 $[\sigma^2(N, T, \tau)]^{\frac{1}{2}}$ の定義
(T = 測定の繰り返し周期, τ = 平均化時間, $r = T/\tau$)

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt = \frac{\phi(t_k+\tau) - \phi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau} \quad (\text{A3.9})$$

ここで、 $t_{k+1} = t_k + T$, $k=1, 2, \dots, N$, T は測定の繰り返し周期である。

そこで、 N 個の \bar{y}_k の標準偏差を次式で定義する。

$$\langle \sigma_y(N, T, \tau) \rangle = \left[\left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left(\bar{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \right)^2 \right\rangle \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A3.10})$$

ただし、 $\langle \cdot \rangle$ は (A3.6) および (A3.8) 式と同様、無限時間平均を表す。(A3.10) 式の特別の場合として、 $N=2$, $T=\tau$ とおけば

$$\langle \sigma_y(2, \tau, \tau) \rangle = \left[\left\langle \frac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}{2} \right\rangle \right]^{\frac{1}{2}}$$

となる。上式で $\sigma_y(\tau) \equiv \sigma_y(2, \tau, \tau)$ とおけば (A3.8) 式を得る。すなわち、2 標本標準偏差 $\sigma_y(\tau)$ は、時間のすき間も重なりもなく隣接してとった 2 つの測定時間 τ ——このペアを連続して無数にとる——での \bar{y} の差だけできまる。実際には有限個数 M の測定時間 τ をとるが、この場合の $\sigma_y(\tau)$ の推定値は次式で求められる。

$$\hat{\sigma}_y(\tau) = \left[\frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{M-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A3.11})$$

以上が IEEE で提案され、その後整備された周波数安定度の 2 種類——周波数領域と時間領域——の尺度である。

また、この 2 種類の尺度間には次の重要な関係式がある。

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} \left[1 - \frac{\sin^2(\pi r f N \tau)}{N^2 \sin^2(\pi r f \tau)} \right] df \quad (\text{A3.12})$$

ここで、 $r = T/\tau$ (図 A3.1)。この式はスペクトル密度 $S_y(f)$ から分散 $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ が一義的にきまることを示している。しかし、後者から前者を求めることは一般には不可能である。このことから、周波数領域の尺度の方が時間領域の尺度よりも、理論的には基本的と言える。なお、(A3.12) 式において、 $N=2$, $r=1$ とすることにより、次の関係式を得る。

$$\langle \sigma_y^2(\tau) \rangle = \frac{2}{\pi \tau} \int_0^\infty S_y\left(\frac{u}{\pi \tau}\right) \frac{\sin^4 u}{u^2} du \quad (\text{A3.13})$$

いま、(A3.12) において $S_y(f)$ が

$$S_y(f) = \begin{cases} h_a f^a & (0 \leq f \leq f_h) \\ 0 & (f > f_h) \end{cases} \quad (\text{A3.14})$$

のように、フーリエ周波数 f の簡単なべきで表せると仮定する。ここで、 f_h はスペクトルの上限の周波数である。この式で $\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$ の場合の $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ の計算値を表 A3.1 に示す。

また、高安定信号発生器の不規則周波数変動は、(A3.14) 式の形のパワースペクトル密度を持ち、かつ相互に独立な個々の雑音の効果の重ね合わせで十分近似できる。そこで信号発生器の周波数変動のパワースペクトル密度 $S_y(f)$ を次式で表す。

$$S_y(f) = h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0 + h_1f + h_2f^2 \quad (\text{A3.15})$$

この式の右辺の各項は第 1 項から順に、それぞれランダムウォーク周波数雑音、フリッカ周波数雑音、白色周波数雑音、フリッカ位相雑音および白色位相雑音に対応したスペクトル密度である。これらの雑音は、系統的または周期的なものを除外して、信号発生器自身による各種の雑音のほか、温度、湿度、振動など、環境変動の影響も含まれる。(A3.15) 式右辺のスペクトル密度に対応する時間領域の安定度の尺度 $\sigma_y(N, T, \tau)$ や $\sigma_y(\tau)$ は表 A3.1 から求めることができる。 $S_y(f)$ と $\sigma_y(\tau)$ の対応関係を、とくに f と τ のべきを重点に画くと図 A3.2 のようになる。

最後に、第 2.3, 第 3.2 および第 3.4 節で使われている周波数領域の安定度尺度の“スクリプトエル”，すなわち $\mathcal{S}(f)$ について述べる。これは次のように定義される。

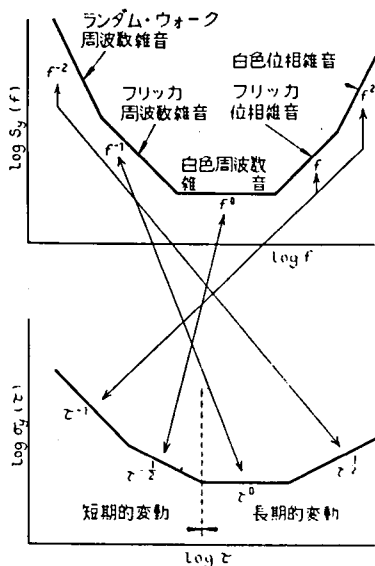


図 A3.2 周波数領域尺度と時間領域尺度の関係

表 A3.1 周波数安定度尺度の変換表
Stability Measure Conversion Chart⁽¹⁾
(Frequency Domain-Time Domain)

$S_y(f)$ = one-sided spectral density of y (dimensions are y^2/f), $0 \leq f \leq f_h$, $f_h \equiv B$, $2\pi f_h \tau \gg 1$; $S_y(f \geq f_h) = 0$

General Definition: $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau, f_h) \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left(\bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \right\rangle$, $\frac{dx}{dt} \equiv y \equiv \frac{\delta \nu}{\nu_0}$, $r \equiv \frac{T}{\tau}$

Special Case: $\sigma_y^2(r) \equiv \langle \sigma_y^2(N-2, T=\tau, \tau, f_h) \rangle = \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \right\rangle$

Useful Relationship:

$$(2\pi)^2 = 39.48$$

$$\ln 2 = 0.693$$

$$2 \ln 2 = 1.386$$

$$\ln 10 = 2.303$$

Time Domain (Allan variances,)	$\sigma_y^2(r)$ [$N=2, r=1$]	$\langle \sigma_y^2(N, T=\tau, \tau, f_h) \rangle$ [$r=1$]	$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau, f_h) \rangle$
Frequency Domain (Power law spectral densities)			
<u>WHITE x</u> $S_y(f) = h_2 f^2 \left(S_x(f) = \frac{h_2}{(2\pi)^2} \right)$ $2\pi f_h \tau \gg 1$	$h_2 \cdot \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2}$	$h_2 \cdot \frac{N+1}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_h}{\tau^2}$	$h_2 \cdot \frac{N+\delta_k(r-1)}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_h}{\tau^2}$ $\delta_k(r-1) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } r=1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
<u>FLICKER x</u> $S_y(f) = h_1 f \left(S_x(f) = \frac{h_1}{(2\pi)^2 f} \right)$ $2\pi f_h \tau \gg 1, 2\pi f_h T \gg 1$	$h_1 \cdot \frac{1}{\tau^2 (2\pi)^2} \left[\frac{9}{2} + 3 \ln(2\pi f_h \tau) - \ln 2 \right]$	$h_1 \cdot \frac{2(N+1)}{N\tau^2 (2\pi)^2} \left[\frac{3}{2} + \ln(2\pi f_h \tau) - \frac{\ln N}{N^2-1} \right]$	$h_1 \cdot \frac{2}{(2\pi \tau)^2} \left\{ \frac{3}{2} + \ln(2\pi f_h \tau) \right.$ $\left. + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \cdot \ln \left[\frac{n^2 \tau^2}{n^2 \tau^2 - 1} \right] \right\}$, for $r \gg 1$
<u>WHITE y (Random Walk x)</u> $S_y(f) = h_0 \left(S_x(f) = \frac{h_0}{(2\pi)^2 f^2} \right)$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} r^{-1}$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} r^{-1}$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} r^{-1}$, for $r \geq 1$ $h_0 \cdot \frac{1}{6} r(N+1) r^{-1}$, for $Nr \leq 1$
<u>FLICKER y</u> $S_y(f) = \frac{h_{-1}}{f} \left(S_x(f) = \frac{h_{-1}}{(2\pi)^2 f^3} \right)$	$h_{-1} \cdot 2 \ln 2$	$h_{-1} \cdot \frac{N \ln N}{N-1}$	$h_{-1} \cdot \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) [-2(nr)^2 \ln(nr)$ $+ (nr+1)^2 \ln(nr+1) + (nr-1)^2 \ln nr-1]$
<u>RANDOM WALK y</u> $S_y(f) = \frac{h_{-2}}{f^2} \left(S_x(f) = \frac{h_{-2}}{(2\pi)^2 f^4} \right)$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{6}$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{12} \cdot N$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{12} [r(N+1)-1]$, $r \geq 1$

$$\alpha(f) = \frac{\text{搬送波から } f \text{ Hz 離れた } 1 \text{ Hz 当りの PM 雑音単側波帯電力}}{\text{全 電 力}} \quad (\text{A3.16})$$

位相変動 $\phi(t)$ が 1 に比べて十分小さいとき，PM（位相変調）雑音側波帯電力の計算から

$$\mathcal{L}(f) = (1/2)S_{\phi}(f) \quad (\text{A3.17})$$

となる。 $S_{\phi}(f)$ は，前述のように，周波数安定度の第 1 の尺度の位相雑音スペクトル密度である。